

WYBRANE ZAGADNIENIA ELEKTROTECHNIKI

WIZUALIZACJA KOMPUTEROWA

DARIUSZ JÓŹWIK

Wydanie pierwsze

Książka dla elektryków i elektroników

PIOTRKÓW TRYBUNALSKI 2012

SPIS TREŚCI

Wykaz najważniejszych oznaczeń i symboli.....	6
Zestawienie najważniejszych jednostek	8
Przedmowa.....	9
1. Układ jednostek SI.....	11
2. Napięcie elektryczne	13
3. Prąd elektryczny.....	13
4. Elementy pasywne	14
4.1. Rezystor idealny.....	14
4.2. Cewka idealna	14
4.3. Kondensator idealny	15
5. Źródło idealne i rzeczywiste	15
5.1. Źródło idealne napięcia.....	15
5.2. Źródło idealne prądu	16
5.3. Źródło rzeczywiste.....	16
6. Łączenie szeregowe i równoległe elementów pasywnych i źródeł.....	16
6.1. Połączenie szeregowe i równoległe rezystorów.....	16
6.2. Połączenie szeregowe i równoległe cewek	17
6.3. Połączenie szeregowe i równoległe kondensatorów	17
6.4. Połączenie szeregowe i równoległe źródła idealnego napięcia	18
6.5. Połączenie szeregowe i równoległe źródła idealnego prądu.....	18
6.6. Połączenie szeregowe i równoległe źródła rzeczywistego	19
7. Prawo Ohma.....	20
8. Prawa Kirchhoffa	20
8.1. I prawo Kirchhoffa.....	20
8.2. II prawo Kirchhoffa	21
9. Energia, moc i sprawność prądu stałego	21

10. Rozwiązywanie obwodów rozgałęzionych.....	22
10.1. Metoda Kirchhoffa.....	22
10.2. Metoda oczkowa.....	23
10.3. Metoda Thevenina.....	25
10.4. Metoda Nortona.....	27
10.5. Metoda potencjałów węzłowych.....	29
11. Napięcia i prądy sinusoidalne.....	32
11.1. Napięcia i prądy sinusoidalne jednofazowe.....	32
11.2. Napięcia sinusoidalne trójfazowe, układ zgodny symetryczny ...	34
12. Elementy idealne R , L , C zasilane napięciem sinusoidalnym.....	35
12.1. Rezystor idealny R zasilany napięciem sinusoidalnym.....	35
12.2. Cewka idealna L zasilana napięciem sinusoidalnym.....	36
12.3. Kondensator idealny C zasilany napięciem sinusoidalnym.....	38
13. Obwód szeregowy RLC , rezonans napięć i trójkąt impedancji.....	39
14. Obwód równoległy RLC , rezonans prądów i trójkąt admitancji.....	44
15. Moc odbiornika jednofazowego i trójfazowego.....	49
15.1. Moc odbiornika jednofazowego, trójkąt mocy.....	49
15.2. Moc odbiornika trójfazowego.....	50
16. Obwody trójfazowe generator – odbiornik.....	52
16.1. Układ gwiazda – gwiazda.....	52
16.2. Układ gwiazda – gwiazda zwarty przewodem neutralnym.....	57
16.3. Układ gwiazda – gwiazda z impedancją w przewodzie neutralnym.....	59
16.4. Układ trójął – gwiazda.....	61
16.5. Układ trójął – trójął.....	65
17. Składowe symetryczne.....	69
18. Stany nieustalone – metoda klasyczna.....	73
18.1. Ładowanie kondensatora, wymuszenie stałe.....	73
18.2. Rozładowywanie kondensatora.....	76
18.3. Magnesowanie cewki, wymuszenie stałe.....	77
18.4. Rozmagnesowywanie cewki.....	79
18.5. Kondensator zasilany napięciem sinusoidalnym.....	81
18.6. Cewka zasilana napięciem sinusoidalnym.....	86
18.7. Obwód szeregowy RLC zasilany napięciem sinusoidalnym.....	91

19. Stany nieustalone – metoda operatorowa	102
19.1. Prawo Ohma w postaci operatorowej	102
19.2. I prawo Kirchhoffa w postaci operatorowej	103
19.3. II prawo Kirchhoffa w postaci operatorowej	103
19.4. Impedancja operatorowa	103
19.5. Admitncja operatorowa	105
19.6. Przykłady zastosowania metody operatorowej do obliczania obwodów stanów nieustalonych	105
20. Filtry	116
20.1. Filtr dolnoprzepustowy <i>LC</i> typu <i>T</i>	116
20.2. Filtr dolnoprzepustowy <i>RC</i> typu <i>T</i>	119
20.3. Filtr górnoprzepustowy <i>LC</i> typu <i>T</i>	121
20.4. Filtr górnoprzepustowy <i>RC</i> typu <i>T</i>	124
20.5. Filtr pasmowy środkowo-przepustowy	126
20.6. Filtr pasmowy środkowo-zaworowy	130
21. Linia długa	134
22. Przekształcenie Fouriera	147
23. Obwody nieliniowe	150
23.1. Rezystancja statyczna	150
23.2. Rezyzancja dynamiczna	151
23.3. Przykłady elementów nieliniowych	151
24. Pole elektrostatyczne	153
25. Statyczne pole magnetyczne	167
26. Pole i fale elektromagnetyczne	180
Literatura	197

WYKAZ NAJWAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ I SYMBOLI

∇^2 – laplasjan skalarny
 Δ – laplasjan wektorowy
 \mathbf{A} – potencjał wektorowy pola magnetycznego
 A – składowa potencjału wektorowego \mathbf{A} względem osi z
 \underline{A} – składowa potencjału wektorowego \mathbf{A} względem osi z (wartość zespolona)
 a – operator obrotu o 120° w dodatnim kierunku trygonometrycznym
 $\arg z$ – argument liczby zespolonej z
 B – susceptancja
 C – pojemność
 e – wartość chwilowa napięcia źródłowego
 E – napięcie źródłowe, wartość skuteczna napięcia źródłowego
 \underline{E} – wartość zespolona napięcia źródłowego
 E_m – wartość maksymalna napięcia źródłowego
 f – częstotliwość
 $F(s)$ – transformata Laplace’a funkcji $f(t)$
 G – konduktancja, przewodność
 i – wartość chwilowa prądu
 i_p – składowa przejściowa prądu
 i_u – składowa ustalona prądu
 I – natężenie prądu stałego, wartość skuteczna prądu
 \underline{I} – wartość zespolona prądu
 I_m – wartość maksymalna prądu
 $\text{Im } z$ – część urojona liczby zespolonej z
 $I(s)$ – transformata Laplace’a prądu
 j – jedność urojona
 L – indukcyjność
 p – moc chwilowa, współczynnik materiałowy (dla pola elektrostatycznego $p = \varepsilon$, dla pola magnetostatycznego i elektromagnetycznego $p = 1 / \mu$)
 P – moc czynna
 Q – moc bierna
 R – rezystancja
 $\text{Re } z$ – część rzeczywista liczb zespolonej z
 s – zmienna zespolona w przekształceniu Laplace’a
 S – moc pozorna
 \underline{S} – moc pozorna zespolona
 t – czas
 T – okres przebiegu okresowego
 u – wartość chwilowa napięcia
 u_p – składowa przejściowa napięcia
 u_u – składowa ustalona napięcia
 U – napięcia stałe, wartość skuteczna napięcia
 \underline{U} – wartość zespolona napięcia
 U_m – wartość maksymalna napięcia

$U(s)$ – transformata Laplace'a napięcia
 v – prędkość
 w – wartość chwilowa energii
 W – praca, energia
 X – reaktancja
 Y – admitancja
 \underline{Y} – admitancja zespolona
 $Y(s)$ – transformata Laplace'a admitancji
 $|z|$ – moduł liczby zespolonej z
 z^* – liczba zespolona sprzężona do z
 Z – impedancja
 \underline{Z} – impedancja zespolona
 \underline{Z}_f – impedancja falowa zespolona linii długiej
 $Z(s)$ – transformata Laplace'a impedancji
 α – stała tłumienia, tłumienność jednostkowa
 β – stała fazowa, przesuwność jednostkowa
 γ – stała przenoszenia linii długiej
 τ – stała czasowa
 φ – kąt przesunięcia fazowego
 φ_i – faza prądu
 φ_u – faza napięcia
 ψ – skojarzony strumień magnetyczny
 ω – pulsacja
 ω_n – pulsacja drgań nietłumionych
 ω_0 – pulsacja drgań własnych
MES – metoda elementów skończonych
MEB – metoda elementów brzegowych
MRZ – metoda rozdzielania zmiennych

ZESTAWIENIE NAJWAŻNIEJSZYCH
JEDNOSTEK

Lp.	Wielkość	Jednostka	
		oznaczenie	nazwa
1	Czas	s	sekunda
2	Częstotliwość	Hz	herc
3	Długość	m	metr
4	Gęstość ładunku liniowego	C/m	kulomb na metr
5	Gęstość ładunku powierzchniowego	C/m ²	kulomb na metr kw.
6	Gęstość ładunku przestrzennego	C/m ³	kulomb na metr sześć.
7	Gęstość prądu	A/m ²	amper na metr kw.
8	Indukcja elektryczna	C/m ²	kulomb na metr kw.
9	Indukcja magnetyczna	T	tesla
10	Indukcyjność	H	henr
11	Kąt płaski	rad	radian
12	Konduktancja	S	simens
13	Konduktywność	S/m	simens na metr
14	Ładunek elektryczny	C	kulomb
15	Masa	kg	kilogram
16	Moc czynna	W	wat
17	Moc bierna	var	war
18	Moc pozorna	V·A	woltoamper
19	Napięcie, potencjał, SEM	V	wolt
20	Natężenie pola elektrycznego	V/m	wolt na metr
21	Natężenie pola magnetycznego	A/m	amper na metr
22	Natężenie prądu	A	amper
23	Pojemność	F	farad
24	Praca, energia	J	dżul
25	Przenikalność elektryczna	F/m	farad na metr
26	Przenikalność magnetyczna	H/m	henr na metr
27	Pulsacja	rad/s	radian na sekundę
28	Rezystancja	Ω	om
29	Rezystywność	Ω·m	omometr
30	Siła	N	niuton
31	Strumień magnetyczny	Wb	weber
32	Temperatura	K	kelwin

PRZEDMOWA

Książkę napisałem zgodnie ze swoimi zainteresowaniami i posiadanym wykształceniem. Przeznaczona jest dla osób uczących się lub interesujących się elektrotechniką.

Przedstawia wybrane wielkości i zagadnienia elektrotechniki oraz ich wizualizację. Należy zaznaczyć, że teraźniejsza elektrotechnika opiera się na zjawiskach statycznego pola ładunków elektrycznych lub na ich ruchu postępowym lub wirowym, najczęściej elektronów. Sprowadza się to do wytworzenia pola elektrostatycznego, statycznego pola magnetycznego lub pola elektromagnetycznego. Z teorii elektrotechniki, teorii obwodów i teorii pola elektromagnetycznego narodziły się wynalazki, które dziś są niezbędne w życiu codziennym człowieka i istnieniu przemysłu, między innymi począwszy od zwykłej lampy żarowej (żarówki) zasilanej energią elektryczną po maszyny elektryczne, silniki, generatory, transformatory, następnie elektrownie i urządzenia elektroniczne i telekomunikacyjne.

W książce przeprowadzono szeroką wizualizację komputerową większości przedstawionych zagadnień elektrotechniki. Wizualizacja ma na celu pomóc i ułatwić czytelnikowi w zrozumieniu podanych zagadnień najczęściej podstawowych. Jednakże czytelnik nie może uważać, że przedstawiony materiał w niniejszej książce jest wystarczający i powinien pogłębiać wiedzę w dostępnej literaturze z powodu częściowego wyboru materiału i braku wyprowadzeń niektórych wzorów.

Niniejsza książka jest częściowym uzupełnieniem dostępnej literatury dydaktycznej.

Autor

1. UKŁAD JEDNOSTEK SI

Obecnie na świecie we wszystkich dziedzinach nauki i techniki stosowany jest przyjęty na XI Generalnej Konferencji Miar w Paryżu 1960 r. międzynarodowy układ jednostek miar SI^{*)}, obejmujący

- a) jednostki podstawowe, przyjęte niezależnie od siebie
- b) jednostki uzupełniające
- c) jednostki pochodne

W Polsce układ jednostek SI wprowadzony został rozporządzeniem Rady Ministrów w 1966 r. (Dz. U. Nr 25 z dnia 30 czerwca 1965 r., poz. 154).

Jednostkami podstawowymi w układzie SI są jednostki siedmiu wielkości

- a) jednostka długości zwana metrem, skrót m
- b) jednostka masy zwana kilogramem, skrót kg
- c) jednostka czasu zwana sekundą, skrót s
- d) jednostka natężenia prądu elektrycznego zwana amperem, skrót A
- e) jednostka temperatury zwana kelwinem, skrót K
- f) jednostka liczebności materii zwana molem, skrót mol
- g) jednostka światłości zwana kandelą, skrót cd

Jednostkami uzupełniającymi w układzie SI, które mają charakter jednostek podstawowych, są

- a) jednostka kąta płaskiego zwana radianem, skrót rad
- b) jednostka kąta bryłowego zwana steradianem, skrót sr

Wszystkie pozostałe wielkości wyrażone za pomocą wielkości podstawowych nazywamy wielkościami pochodnymi.

W tabeli 1.1 zestawiono określenia jednostek podstawowych i uzupełniających w układzie SI.

Tabela 1.1. Jednostki miar układu SI

Wielkość	Jednostki miary		Definicja
	nazwa	oznaczenie	
Jednostki podstawowe			
długość	metr	m	metr jest długością równą 1 650 763,73 długości fali w próżni promieniowania odpowiadającego przejściu między poziomami $2p_{10}$ a $5d_5$ atomu kryptomu 86
masa	kilogram	kg	kilogram jest masą międzynarodowego wzorca tej jednostki przechowywanego w Międzynarodowym Biurze Miar w Sévres
czas	sekunda	s	sekunda jest czasem trwania 9 192 631 770 okresów promieniowania, odpowiadającemu przejściu między dwoma nadsubtelnymi poziomami stanu podstawowego atomu cezu 133

^{*)} Litery SI są skrótem słów francuskich „system international”, tj. układ międzynarodowy

prąd elektryczny	amper	A	amper jest prądem elektrycznym nie zmieniającym się, który – płynąc w dwóch równoległych prostoliniowych, nieskończenie długich przewodach, o przekroju okrągłym znikomo małym, umieszczonych w próżni w odległości 1 m jeden od drugiego – wywołałby między tymi przewodami siłę $2 \cdot 10^{-7}$ N (niuton) na każdy metr długości
temperatura	kelwin	K.	kelwin jest to $1/273,16$ część temperatury termodynamicznej punktu potrójnej wody
liczebność materii	mol	mol	mol jest to liczność materii występująca, gdy liczba cząstek jest równa liczbie atomów zawartych w masie 0,012 kg węgla 12
światłość	kandela	cd	kandela jest światłością, która ma w kierunku prostopadłym pole $1/6 \cdot 10^5$ m ² powierzchni ciała doskonale czarnego, promieniującego w temperaturze krzepnięcia platyny pod ciśnieniem 101 325 Pa (paskali)
Jednostki uzupełniające			
kąt płaski	radian	rad	radian jest kątem płaskim zawartym między dwoma promieniami koła, wycinającym z okręgu tego koła łuk o długości równej promieniowi
kąt bryłowy	steradian	sr	steradian jest kątem bryłowym o wierzchołku w środku kuli wycinającym z powierzchni tej kuli pole równe kwadratowi jej promienia

Czasem zapisywanie wielkości w jednostkach układu SI jest kłopotliwe ze względu na to, iż jednostka główna jest zbyt duża lub zbyt mała. By uprościć zapis wprowadza się jednostki krotne (wielokrotne lub podwielokrotne) w stosunku do jednostek głównych układu SI.

W tabeli 1.2 zestawiono przedrostki i odpowiadające im mnożniki stosowanych jednostek krotnych.

Tabela 1.2. Przedrostki i odpowiadające im mnożniki

Skrót	Przedrostek	Mnożnik	Skrót	Przedrostek	Mnożnik
E	eksa	10^{18}	d	decy	10^{-1}
P	peta	10^{15}	c	centy	10^{-2}
T	tera	10^{12}	m	mili	10^{-3}
G	giga	10^9	μ	mikro	10^{-6}
M	mega	10^6	n	nano	10^{-9}
k	kilo	10^3	p	piko	10^{-12}
h	hekto	10^2	f	femto	10^{-15}
da	deka	10^1	a	atto	10^{-18}

2. NAPIĘCIE ELEKTRYCZNE

Napięciem elektrycznym nazywamy różnice potencjałów pomiędzy dwoma punktami A i B

$$U_{AB} = V_A - V_B \quad (2.1)$$

Jednostką napięcia elektrycznego w układzie SI jest wolt (V).

W teorii potencjałem dowolnego punktu np. A nazywamy stosunek pracy wykonanej w polu elektrycznym przy przenoszeniu małego ładunku próbnego q od punktu A do nieskończoności do ładunku q .



$$V_A = \frac{W_{A\infty}}{q} \quad (2.2)$$

Rys. 2.1. Praca przy wynoszeniu małego ładunku próbnego q do nieskończoności

Jednostką potencjału elektrycznego podobnie jak napięcia jest wolt (V).

Potencjał elektryczny V jest wielkością skalarną a więc posiada tylko wartość punktową w węźle lub przestrzeni.

Bezpośrednio wynika z tego, że napięcie elektryczne pomiędzy dwoma punktami A , B odpowiada stosunkowi pracy wykonanej w polu elektrycznym przy przenoszeniu małego ładunku próbnego q od punktu A do punktu B do ładunku q .

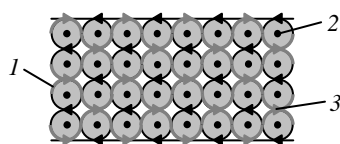


$$U_{AB} = \frac{W_{AB}}{q} \quad (2.3)$$

Rys. 2.2. Praca przy przenoszeniu małego ładunku próbnego q od punktu A do punktu B

3. PRĄD ELEKTRYCZNY

Prądem elektrycznym nazywamy uporządkowany przepływ elektronów w strukturze atomowej przewodnika.



Rys. 3.1. Ilustracja przepływu prądu elektrycznego przez przewodnik, 1 – droga przepływu elektronów, 2 – jądro atomu, 3 – kierunek wirowania elektronów

Miarą prądu elektrycznego jest stosunek ilości ładunku elektrycznego ΔQ przepływającego przez przekrój poprzeczny przewodnika do przedziału czasu Δt , w którym przepływ ładunku nastąpił

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad (3.1)$$

Jednostką natężenia prądu elektrycznego w układzie SI jest amper (A).

Amper jest prądem elektrycznym nie zmieniającym się w czasie, który płynąc w dwóch równoległych prostoliniowych nieskończenie długich przewodach o przekroju okrągłym znikomo małym, umieszczonych w próżni w odległości 1 m jeden od drugiego wywołałby między tymi przewodami siłę $2 \cdot 10^{-7}$ N (niuton) na każdy metr długości.

W praktyce często spotyka się wielkość zwaną gęstością prądu J . Gęstość prądu wyraża stosunek przepływającego prądu do powierzchni poprzecznej przewodnika przez którą prąd przepływa

$$J = \frac{I}{S} \quad (3.2)$$

gdzie I – natężenie prądu, S – powierzchnia poprzeczna przewodnika. Gęstość prądu J w układzie SI wyrażana jest przez amper na metr kwadratowy (A/m^2).

4. ELEMENTY PASYWNE

4.1. Rezystor idealny

Rezystor idealny przedstawia jedynie opór dla przepływającego prądu. Nie wytwarza natomiast pola elektrycznego ani magnetycznego. Energia tracona na rezystorze przekształca się w energię cieplną, która ulega rozproszeniu w otaczającym środowisku. Parametrem charakteryzującym rezystor jest rezystancja R lub konduktancja G czyli przewodność, przy czym



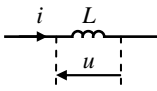
Rys. 4.1. Symbol graficzny rezystora idealnego

$$G = \frac{1}{R} \quad (4.1)$$

W układzie jednostek SI jednostką rezystancji jest om (Ω), a jednostką konduktancji jest siemens (S).

4.2. Cewka idealna

Cewką idealną nazywamy element, w którym pod wpływem przyprływu prądu dochodzi do wytwarzania pola magnetycznego. W cewce idealnej pomija się rezystancję oraz pojemność. Parametrem charakteryzującym cewkę idealną jest indukcyjność L , której jednostką w układzie SI jest henr (H).



Rys. 4.2. Symbol graficzny cewki idealnej

Indukcyjność L cewki jest równa ilorazowi strumienia skojarzonego ψ i prądu i w uzwojeniu cewki, czyli

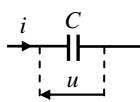
$$L = \frac{\psi}{i} \quad (4.2)$$

Jeżeli dojdzie do wzrostu lub zaniku w czasie płynącego prądu przez cewkę, dochodzi do indukcji elektromagnetycznej. Siła elektromotoryczna indukowana w uzwojeniu cewki wyraża się wzorem

$$e = L \frac{di}{dt} \quad (4.3)$$

4.3. Kondensator idealny

Kondensatorem idealnym nazywamy element, w którym dochodzi do gromadzenia ładunku elektrycznego na jego okładkach. Jednocześnie pomijamy stratność dielektryka przyjmując, że jego rezystancja jest nieskończenie wielka jak również to, że w kondensatorze może dochodzić do wytwarzania pola magnetycznego. Parametrem charakteryzującym kondensator jest pojemność C , której jednostką w układzie SI jest farad (F).



Rys. 4.3. Symbol graficzny kondensatora idealnego

Pojemność C kondensatora jest równa ilorazowi ładunku Q na okładce kondensatora i napięcia u między okładkami, czyli

$$C = \frac{Q}{u} \quad (4.4)$$

Gdy napięcie u jest zmienne w czasie, wówczas w gałęzi zawierającej kondensator płynie prąd

$$i = \frac{dQ}{dt} \quad (4.5)$$

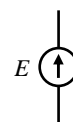
a w przypadku kondensatora liniowego ($C = const.$)

$$i = C \frac{du}{dt} \quad (4.6)$$

5. ŹRÓDŁO IDEALNE I RZECZYWISTE

5.1. Źródło idealne napięcia

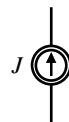
Źródłem idealnym napięciowym nazywamy takie źródło, w którym napięcie nie zależy od prądu obciążenia, tzn. $U = const.$ Przyjmujemy, że rezystancja wewnętrzna takiego źródła równa jest zero $R_w = 0$, czyli prąd obciążenia nie wywołuje spadku napięcia na źródle.



Rys. 5.1. Symbol graficzny idealnego źródła napięciowego

5.2. Źródło idealne prądu

Źródłem idealnym prądu nazywamy takie źródło, w którym wydzielany prąd nie zależy od rezystancji obciążenia, $I = \text{const}$. Przyjmujemy, że rezystancja wewnętrzna takiego źródła jest nieskończenie duża $R_w \rightarrow \infty$. W obwodzie napotkana rezystancja

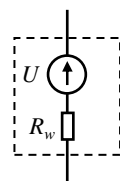


Rys. 5.2. Symbol graficzny idealnego źródła prądowego

obciążenia jest niewielka w porównaniu z rezystancją wewnętrzną idealnego źródła prądu $R_w \gg R_0$, zatem rezystancja obciążenia nie ma wpływu na wydajność prądową źródła.

5.3. Źródło rzeczywiste

Źródłem rzeczywistym nazywamy takie źródło, w którym uwzględnia się zależny od prądu obciążenia, spadek napięcia na rezystancji wewnętrznej źródła R_w . Źródło rzeczywiste można przedstawić jako szeregowe połączenie idealnego źródła napięciowego i rezystora stanowiącego rezystancję wewnętrzną źródła rzeczywistego.



Rys. 5.3. Symbol graficzny źródła rzeczywistego

6. ŁĄCZENIE SZEREGOWE I RÓWNOLEGŁE ELEMENTÓW PASYWNYCH I ŹRÓDEŁ

6.1. Połączenie szeregowe i równoległe rezystorów

Rezystancja zastępcza R_z szeregowo połączonych rezystorów wyraża się wzorem

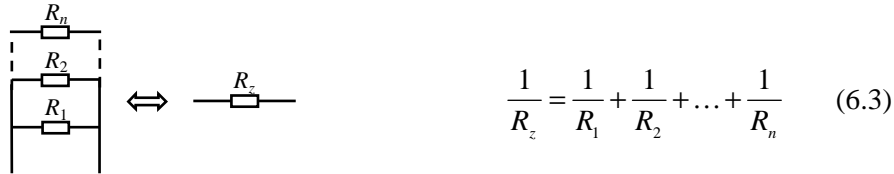
$$\text{---} \boxed{R_1} \text{---} \boxed{R_2} \text{---} \boxed{R_n} \text{---} \iff \text{---} \boxed{R_z} \text{---} \qquad R_z = R_1 + R_2 + \dots + R_n \quad (6.1)$$

Rys. 6.1. Połączenie szeregowe rezystorów, rezystancja zastępcza

Dla n rezystorów połączonych szeregowo o jednakowej wartości rezystancji wzór (6.1) przybiera postać

$$R_z = nR \quad (6.2)$$

Rezystancja zastępcza R_z równoległe połączonych rezystorów wyraża się wzorem



Rys. 6.2. Połączenie równoległe rezystorów, rezystancja zastępcza

Dla dwóch rezystorów wzór (6.3) przyjmuje postać

$$R_z = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (6.4)$$

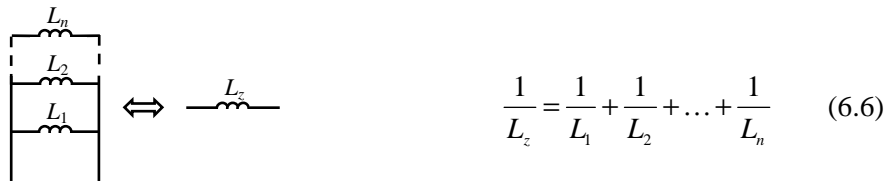
6.2. Połączenie szeregowe i równoległe cewek

Indukcyjność zastępcza L_z szeregowo połączonych cewek wyraża się wzorem



Rys. 6.3. Połączenie szeregowe cewek, indukcyjność zastępcza

Indukcyjność zastępcza L_z równoległe połączonych cewek wyraża się wzorem



Rys. 6.4. Połączenie równoległe cewek, indukcyjność zastępcza

6.3. Połączenie szeregowe i równoległe kondensatorów

Pojemność zastępcza C_z szeregowo połączonych kondensatorów wyraża się wzorem



Rys. 6.5. Połączenie szeregowe kondensatorów, pojemność zastępcza

Pojemność zastępcza C_z równoległe połączonych kondensatorów wyraża się wzorem



Rys. 6.6. Połączenie równoległe kondensatorów, pojemność zastępcza

6.4. Połączenie szeregowe i równoległe źródła idealnego napięcia

Przy połączeniu szeregowym idealnych źródeł napięcia, wypadkowa siła elektromotoryczna sumuje się.



Rys. 6.7. Połączenie szeregowe idealnych źródeł napięcia

Połączenie równoległe idealnych źródeł napięcia dopuszczalne jest tylko w przypadku gdy $E_1 = E_2$. W przeciwnym przypadku ($E_1 \neq E_2$) płyną prądy zwarciove wyrównawcze.



Rys. 6.8. Połączenie równoległe idealnych źródeł napięcia

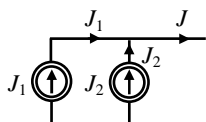
6.5. Połączenie szeregowe i równoległe źródła idealnego prądu

Szeregowe połączenie źródeł prądu dopuszczalne jest tylko w przypadku gdy $J_1 = J_2$.



Rys. 6.9. Połączenie szeregowe idealnych źródeł prądu

Wydajność idealnych źródeł prądu przy połączeniu równoległym określa się z I prawa Kirchhoffa



$$J = J_1 + J_2 \quad (6.12)$$

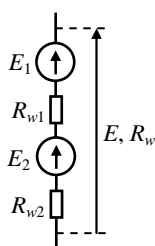
Rys. 6.10. Połączenie równoległe idealnych źródeł prądu

6.6. Połączenie szeregowe i równoległe źródła rzeczywistego

Przy połączeniu szeregowym źródeł rzeczywistych, wypadkowa siła elektromotoryczna oraz rezystancja wewnętrzna źródeł sumuje się

$$E = E_1 + E_2 \quad (6.13)$$

$$R_w = R_{w1} + R_{w2} \quad (6.14)$$



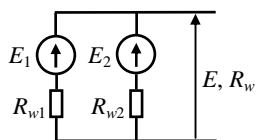
Rys. 6.11. Połączenie szeregowe źródeł rzeczywistych

Połączenie szeregowe źródeł rzeczywistych stosuje się w celu zwiększenia wypadkowej wartości siły elektromotorycznej.

Połączenie równoległe źródeł rzeczywistych dopuszczalne jest tylko w przypadku gdy siły elektromotoryczne źródeł są sobie równe, tzn. $E_1 = E_2$. W przeciwnym przypadku ($E_1 \neq E_2$) płyną prądy wyrównawcze ograniczone przez rezystancje wewnętrzną źródeł. Przy spełnionym warunku otrzymujemy

$$E = E_1 = E_2 \quad (6.15)$$

$$R_w = \frac{R_{w1} R_{w2}}{R_{w1} + R_{w2}} \quad (6.16)$$



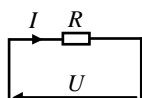
Rys. 6.12. Połączenie równoległe źródeł rzeczywistych

Połączenie równoległe źródeł rzeczywistych jest korzystne ze względu na zmniejszenie rezystancji wewnętrznej w stosunku do pojedynczego źródła. Wynikiem tego jest większa stabilność napięcia wyjściowego źródła od prądu obciążenia, tzn. występuje mniejszy spadek napięcia na źródle.

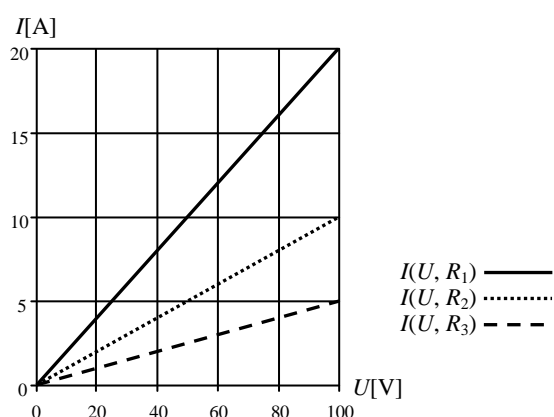
7. PRAWO OHMA

Prąd w przewodniku jest wprost proporcjonalny do przyłożonego do jego końców napięcia, a odwrotnie proporcjonalny do rezystancji przewodnika

$$I = \frac{U}{R} \quad (7.1)$$



Rys. 7.1. Obwód elektryczny z rezystorem

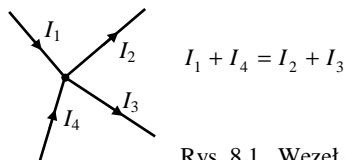


Rys. 7.2. Ilustracja prawa Ohma, zależność prądu od napięcia zasilającego i rezystancji obwodu $I = f(U, R)$ dla $U = 0 \dots 100\text{V}$, $R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 10\Omega$, $R_3 = 20\Omega$

8. PRAWA KIRCHHOFFA

8.1. I prawo Kirchhoffa

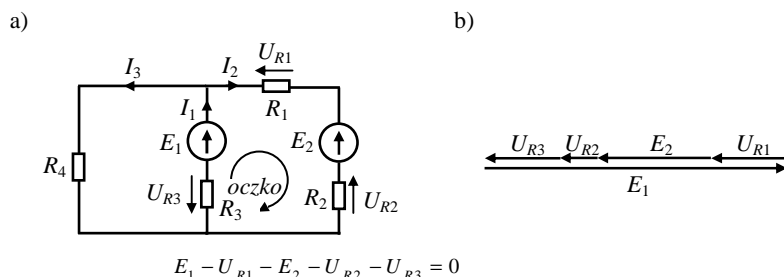
Suma prądów dopływających do dowolnego węzła obwodu elektrycznego jest równa sumie prądów odpływających od węzła.



Rys. 8.1. Węzeł obwodu elektrycznego

8.2. II prawo Kirchhoffa

W dowolnym oczku obwodu elektrycznego prądu stałego suma sił elektromotorycznych i spadków napięć na elementach rezystancyjnych jest równa zero.



Rys. 8.2a) Oczko obwodu elektrycznego, b) oznaczenie sił elektromotorycznych i spadków napięć w oczku

9. ENERGIA, MOC I SPRAWNOŚĆ PRĄDU STAŁEGO

Energia elektryczna (z fizyki energia równa się pracy) pobrana przez odbiornik o mocy P w czasie t wyraża się wzorem

$$W = Pt \quad (9.1)$$

Jednostką energii elektrycznej w układzie SI jest kilowatogodzina (kW·h).

Mocą odbiornika nazywamy stosunek wydatkowanej pracy W przez odbiornik do czasu pracy t

$$P = \frac{W}{t} \quad (9.2)$$

lub jako iloczyn napięcia i prądu odbiornika

$$P = UI \quad (9.3)$$

Dla $U = IR$ oraz $I = U/R$ otrzymujemy również

$$P = I^2 R \quad (9.4)$$

$$P = \frac{U^2}{R} \quad (9.5)$$

Jednostką mocy w układzie SI jest wat (W).

Sprawnością odbiornika nazywamy stosunek mocy użytecznej wydatkowanej przez odbiornik do mocy pobieranej przez odbiornik ze źródła

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} \quad (9.6)$$

gdzie P_2 – moc użyteczna wydatkowana przez odbiornik, P_1 – moc pobierana przez odbiornik ze źródła.

Sprawność odbiornika jest bezwymiarowa lub wyrażana w procentach

$$\eta_{\%} = \frac{P_2}{P_1} \cdot 100\% \quad (9.7)$$

10. ROZWIĄZYWANIE OBWODÓW ROZGAŁĘZIONYCH

Poniżej podane metody rozwiązywania obwodów rozgałęzionych są najbardziej popularne i najczęściej stosowane. Mogą być zastosowane do rozwiązywania obwodów prądu stałego lub sinusoidalnie zmiennego.

W przypadku obwodów prądu stałego rozpatrujemy rezystancje odbiorników R oraz napięcia i prądy w obwodzie wyrażone za pomocą liczb rzeczywistych. W przypadku obwodów prądu sinusoidalnie zmiennego zamiast rezystancji R rozpatruje się impedancję \underline{Z} odbiorników (pojęcie impedancji jest wyjaśnione w rozdziale 13). Impedancję \underline{Z} wyraża się za pomocą liczb zespolonych

$$\underline{Z} = R + jX \quad (10.1)$$

Napięcia i prądy na poszczególnych elementach obwodu wówczas również wyrażamy za pomocą liczb zespolonych \underline{U} , \underline{I} .

Poniżej zostaną przedstawione metody dla prądu stałego gdzie szukane wielkości zastaną wyrażone za pomocą liczb rzeczywistych R , U , I .

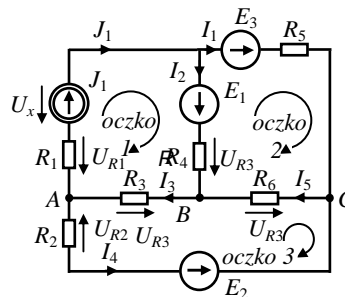
10.1. Metoda Kirchhoffa

Dla przykładu rozpatrzmy obwód elektryczny rys. 10.1, w którym znane są wartości sił elektromotorycznych źródeł napięciowych E_1 , E_2 , E_3 , prąd źródłowy J_1 i wartości rezystancji rezystorów R_1 , R_2 , R_3 , R_4 , R_5 , R_6 . Szukamy prądów gałęziowych I_1 , I_2 , I_3 , I_4 , I_5 , spadku napięcia na źródle prądowym U_x oraz spadków napięć na rezystorach U_{R1} , U_{R2} , U_{R3} , U_{R4} , U_{R5} , U_{R6} .

Metoda Kirchhoffa polega na ułożeniu

- $(n - 1)$ równań prądu dla węzłów obwodu z I prawa Kirchhoffa, gdzie n – ilość węzłów obwodu,
- dla każdego oczka obwodu równania napięć z II prawa Kirchhoffa.

Dla obwodu z rys. 10.1 dla węzłów A , B , C i oczek 1, 2, 3 zgodnie z metodą Kirchhoffa otrzymujemy układ równań



Rys. 10.1. Rozwiązywany obwód

$$\begin{cases} I_3 - J_1 - I_4 = 0 \\ I_2 + I_5 - I_3 = 0 \\ I_1 + I_4 - I_5 = 0 \\ E_1 - U_{R4} - U_{R3} - U_{R1} - U_x = 0 \\ E_3 - U_{R5} - U_{R6} + U_{R4} - E_1 = 0 \\ U_{R2} + U_{R3} + U_{R6} - E_2 = 0 \end{cases} \quad (10.2)$$

Dla

$$U_{R1} = R_1 J_1 \quad (10.3)$$

$$U_{R2} = R_2 I_4 \quad (10.4)$$

$$U_{R3} = R_3 I_3 \quad (10.5)$$

$$U_{R4} = R_4 I_2 \quad (10.6)$$

$$U_{R5} = R_5 I_1 \quad (10.7)$$

$$U_{R6} = R_6 I_5 \quad (10.8)$$

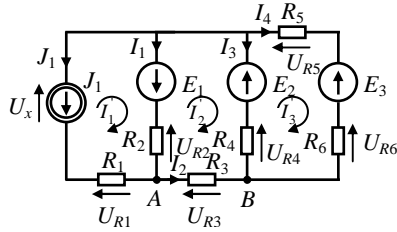
porządkując względem niewiadomych układ równań (10.2) ostatecznie otrzymujemy

$$\begin{cases} I_3 - I_4 = J_1 \\ I_2 - I_3 + I_5 = 0 \\ I_1 + I_4 - I_5 = 0 \\ R_4 I_2 + R_3 I_3 + U_x = E_1 - R_1 J_1 \\ -R_5 I_1 + R_4 I_2 - R_6 I_5 = E_1 - E_3 \\ R_3 I_3 + R_2 I_4 + R_6 I_5 = E_2 \end{cases} \quad (10.9)$$

Po rozwiązaniu układu równań (10.9) otrzymujemy szukane prądy obwodu I_1 , I_2 , I_3 , I_4 , I_5 oraz spadek napięcia na źródle prądowym U_x . Pozwala to wyznaczyć poszczególne spadki napięcia na rezystorach obwodu R_1 , R_2 , R_3 , R_4 , R_5 , R_6 , wzory (10.3, 10.4, 10.5, 10.6, 10.7, 10.8).

10.2. Metoda oczkowa

Dla przykładu rozpatrzmy obwód elektryczny rys. 10.2, w którym oznaczymy wyimaginowane prądy oczkowe płynące w każdym oczku obwodu. Ponieważ obwód posiada trzy oczka, wyszczególniamy trzy prądy oczkowe I_1' , I_2' , I_3' . Metoda oczkowa polega na ułożeniu dla każdego oczka obwodu równania napięć z II prawa Kirchhoffa, uwzględniając oznaczone prądy oczkowe.



Rys. 10.2. Rozwiązywany obwód

Zakładamy także, że znane są nam siły elektromotoryczne źródeł napięciowych E_1, E_2, E_3 , prąd źródłowy J_1 oraz wartości rezystancji rezystorów $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$. Prąd oczkowy I_1' jest nam znany z uwagi na występowanie w oczku źródła prądowego J_1 , natomiast nie znany jest występujący na źródle prądowym spadek

napięcia U_x . Ponadto szukamy prądów gałęziowych I_1, I_2, I_3, I_4 oraz spadków napięć na rezystorach $U_{R1}, U_{R2}, U_{R3}, U_{R4}, U_{R5}, U_{R6}$.

Dla obwodu z rys. 10.2 zgodnie z metodą oczkową dla oczek 1, 2, 3 (prądów oczkowych I_1', I_2', I_3') otrzymujemy równania

$$\begin{cases} E_1 - U_{R2} + U_{R1} + U_x = 0 \\ -E_1 - E_2 - U_{R4} + U_{R3} + U_{R2} = 0 \\ E_2 - U_{R5} - E_3 - U_{R6} + U_{R4} = 0 \end{cases} \quad (10.10)$$

Dla

$$U_{R1} = -R_1 I_1' = R_1 J_1, \quad I_1' = -J_1 \quad (10.11)$$

$$U_{R2} = R_2 (I_1' - I_2') = -R_2 (J_1 + I_2') \quad (10.12)$$

$$U_{R3} = -R_3 I_2' \quad (10.13)$$

$$U_{R4} = R_4 (I_2' - I_3') \quad (10.14)$$

$$U_{R5} = R_5 I_3' \quad (10.15)$$

$$U_{R6} = R_6 I_3' \quad (10.16)$$

porządkując względem niewiadomych układ równań (10.10) ostatecznie otrzymujemy, przy czym prądy gałęziowe wyrażone są przez prądy oczkowe

$$\begin{cases} -R_2 I_2' - U_x = E_1 + (R_1 + R_2) J_1 \\ (R_2 + R_3 + R_4) I_2' - R_4 I_3' = -E_1 - E_2 - R_2 J_1 \\ -R_4 I_2' + (R_4 + R_5 + R_6) I_3' = E_2 - E_3 \end{cases} \quad (10.17)$$

$$I_1 = I_1' - I_2' = -J_1 - I_2' \quad (10.18)$$

$$I_2 = -I_2' \quad (10.19)$$

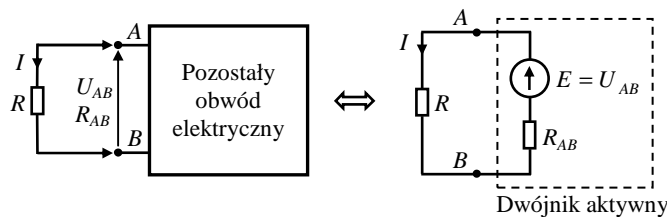
$$I_3 = I_2' - I_3' \quad (10.20)$$

$$I_4 = I_3' \quad (10.21)$$

Po rozwiązaniu układu równań (10.17) i uwzględnieniu równań (10.18, 10.19, 10.20, 10.21) otrzymujemy prądy oczkowe obwodu I_2, I_3 , spadek napięcia na źródle prądowym U_x oraz prądy gałęziowe I_1, I_2, I_3, I_4 . Z równań (10.11, 10.12, 10.13, 10.14, 10.15, 10.16) otrzymujemy spadki napięcia na rezystorach obwodu $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$ wyrażone przez prądy oczkowe.

10.3. Metoda Thevenina

Metoda Thevenina stosowana jest do wyznaczania prądu w obwodzie elektrycznym tylko w jednej wybranej gałęzi. Polega ona na wyłączeniu z obwodu gałęzi, w której szukamy prądu i zastąpieniu pozostałego obwodu elektrycznego dwójnikiem aktywnym, który stanowi rzeczywiste źródło napięcia.



Rys. 10.3. Przekształcenie obwodu zgodnie z metodą Thevenina

Wyjaśnienia

U_{AB} – napięcie widziane z zacisków A, B po odłączeniu rozwiązywanej gałęzi z obwodu elektrycznego,

R_{AB} – rezystancja obwodu elektrycznego widziana z zacisków A, B po odłączeniu od obwodu rozwiązywanej gałęzi (przy wyznaczaniu rezystancji R_{AB} źródła napięciowe obwodu zwiera się, natomiast w przypadku występowania w gałęzi źródła prądowego, gałąź się rozwiera). Rezystancja R_{AB} z definicji metody Thevenina stanowi rezystancję wewnętrzną źródła napięciowego (dwójnika aktywnego),

R – rezystancja rozwiązywanej gałęzi,

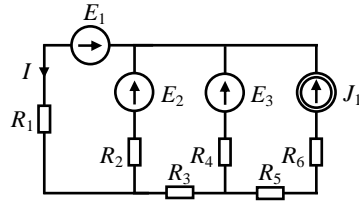
I – szukany prąd gałęzi.

Prąd rozwiązywanej gałęzi szukany metodą Thevenina wyraża się wówczas wzorem

$$I = \frac{U_{AB}}{R + R_{AB}} \quad (10.22)$$

Dla przykładu rozpatrzmy obwód elektryczny rys. 10.4, w którym będziemy szukać prądu I przepływającego przez rezystor R_1 . Zakładamy, że siły elektromotoryczne źródeł napięciowych E_1, E_2, E_3 , prąd źródłowy J_1 oraz rezystancje $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$ są nam znane.

W pierwszym kroku metody Thevenina wyznaczamy napięcie U_{AB} występujące na zaciskach A, B po odłączeniu z obwodu rozwiązywanej gałęzi.



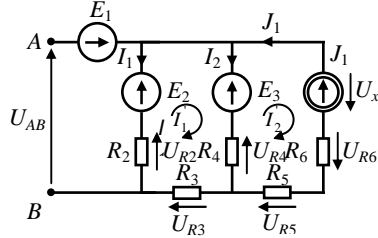
Rys. 10.4. Rozwiązywany obwód

Dla rozważanego obwodu napięcie U_{AB} wyraża się wzorem

$$U_{AB} = -E_1 + E_2 + U_{R_2} \quad (10.23)$$

gdzie

$$U_{R_2} = R_2 I_1 \quad (10.24)$$



Rys. 10.5. Wyznaczanie napięcia U_{AB} w obwodzie po wyłączeniu rozwiązywanej gałęzi

Prąd I_1 wyznaczymy metodą oczkową (p. 10.2), układając równanie napięć z II prawa Kirchhoffa dla oczka I (prąd oczkowy I_1). Równanie napięć przyjmuje postać

$$E_2 - E_3 - U_{R_4} + U_{R_3} + U_{R_2} = 0 \quad (10.25)$$

Dla

$$U_{R_2} = -R_2 I_1' \quad (10.26)$$

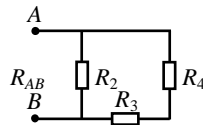
$$U_{R_3} = -R_3 I_1' \quad (10.27)$$

$$U_{R_4} = R_4 (I_1' - I_2') = R_4 (I_1' + J_1), \quad I_2' = -J_1 \quad (10.28)$$

oraz uwzględniając, że $I_1 = -I_1'$, ostatecznie otrzymujemy

$$I_1 = \frac{-E_2 + E_3 + R_4 J_1}{R_2 + R_3 + R_4} \quad (10.29)$$

Następnie wyznaczamy rezystancję R_{AB} widzianą z zacisków A, B po odłączeniu od obwodu gałęzi z rezystorem R_1 (wyznaczając rezystancję R_{AB} zwieramy źródła napięciowe, natomiast gałąź, w której występuje źródło prądowe rozwieramy). Dla wyznaczania rezystancji R_{AB} otrzymujemy obwód z rys. 10.6.



Rys. 10.6. Wyznaczanie rezystancji R_{AB}

Rezystory R_3 i R_4 połączone są szeregowo, natomiast R_2 z R_3 i R_4 równolegle, wobec tego otrzymujemy

$$R_{AB} = \frac{R_2 (R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4} \quad (10.30)$$

Ostatecznie otrzymujemy z metody Thevenina wzór (10.22), prąd I w rozwiązywanej gałęzi

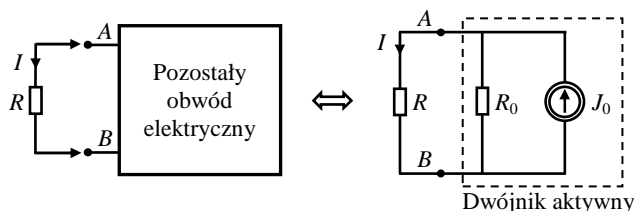
$$I = \frac{U_{AB}}{R_{AB} + R_1} \quad (10.31)$$

Spadek napięcia na rezystorze R_1 wyraża się wzorem

$$U_{R_1} = R_1 I \quad (10.32)$$

10.4. Metoda Nortona

Metoda Nortona podobnie jak metoda Thevenina stosowana jest do wyznaczania prądu w obwodzie elektrycznym tylko w jednej wybranej gałęzi. Polega ona na wyłączeniu z obwodu gałęzi, w której szukamy prądu i zastąpieniu pozostałego obwodu elektrycznego dwójnikiem aktywnym, który stanowi w metodzie Nortona rzeczywiste źródło prądu.



Rys. 10.7. Przekształcenie obwodu zgodnie z metodą Nortona

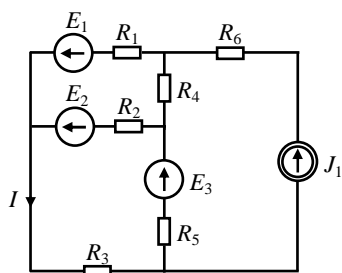
Wyjaśnienia

J_0 – prąd płynący w bezoporowej gałęzi zwierającej zaciski A, B po odłączeniu od obwodu rozwiązywanej gałęzi,

R_0 – rezystancja obwodu elektrycznego widziana z zacisków A, B po odłączeniu od obwodu rozwiązywanej gałęzi (przy wyznaczaniu rezystancji R_0 źródła napięciowe obwodu zwiera się, natomiast w przypadku występowania w gałęzi źródła prądowego, gałąź się rozwiera). Rezystancja R_0 z definicji metody Nortona stanowi rezystancję wewnętrzną źródła prądowego (dwójnika aktywnego).

Prąd rozwiązywanej gałęzi szukany metodą Nortona wyraża się wówczas wzorem

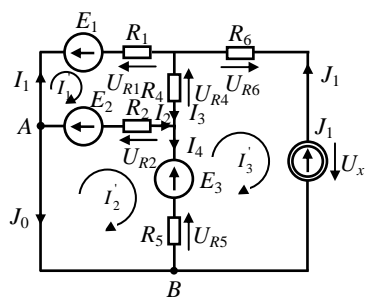
$$I = \frac{R_0}{R_0 + R} J_0 \quad (10.33)$$



Rys. 10.8. Rozwiązywany obwód

Dla przykładu rozpatrzmy obwód elektryczny rys. 10.8, w którym będziemy szukać prądu I przepływającego przez rezystor R_3 . Zakładamy, że siły elektromotoryczne źródeł napięciowych E_1, E_2, E_3 , prąd źródłowy J_1 oraz rezystancje $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$ są nam znane.

W pierwszym kroku metody Nortona wyznaczamy prąd źródłowy J_0 płynący w bezporowej gałęzi zwierającej zaciski A, B po odłączeniu od obwodu rozwiązywanej gałęzi.



Prąd źródłowy J_0 wyznaczmy metodą oczkową (p. 10.2), rys. 10.9.

Rys. 10.9. Wyznaczanie prądu źródłowego J_0 metodą oczkową

Układając równania napięć z II prawa Kirchhoffa dla oczek 1, 2, 3 (prądy oczkowe I_1', I_2', I_3') otrzymujemy następujący układ równań

$$\begin{cases} E_2 - E_1 - U_{R1} - U_{R4} + U_{R2} = 0 \\ -E_2 - U_{R2} - E_3 - U_{R5} = 0 \\ E_3 + U_{R4} + U_{R6} + U_x + U_{R5} = 0 \end{cases} \quad (10.34)$$

Dla

$$U_{R1} = R_1 I_1' \quad (10.35)$$

$$U_{R2} = R_2 (-I_1' + I_2') \quad (10.36)$$

$$U_{R4} = R_4 (I_1' - I_3') = R_4 (I_1' + J_1), \quad I_3' = J_1 \quad (10.37)$$

$$U_{R5} = R_5 (I_2' - I_3') = R_5 (I_2' + J_1) \quad (10.38)$$

$$U_{R6} = -R_6 I_3' = R_6 J_1 \quad (10.39)$$

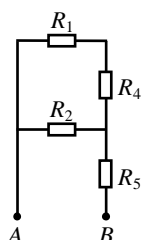
porządkując względem niewiadomych układ równań (10.34) ostatecznie otrzymujemy

$$\begin{cases} (R_1 + R_2 + R_4)I_1' - R_2 I_2' = -E_1 + E_2 - R_4 J_1 \\ -R_2 I_1' + (R_2 + R_5)I_2' = -E_2 - E_3 - R_5 J_1 \\ R_4 I_1' + R_5 I_2' + U_x = -E_3 - (R_4 + R_5 + R_6)J_1 \end{cases} \quad (10.40)$$

Rozwiązując układ równań (10.40) otrzymujemy prąd oczkowy I_2' , który pozwala wyznaczyć szukany prąd źródłowy J_0

$$J_0 = -I_2' \quad (10.41)$$

Następnie wyznaczamy rezystancję R_0 widzianą z zacisków A, B po odłączeniu od obwodu gałęzi z rezystorem R_3 (wyznaczając rezystancję R_0 zwieramy źródła napięciowe, natomiast gałąź, w której występuje źródło prądowe rozwieramy). Dla wyznaczania rezystancji R_0 otrzymujemy obwód z rys. 10.10.



Rys. 10.10. Wyznaczanie rezystancji R_0

Rezystory R_1 i R_4 połączone są szeregowo, R_1, R_4 z R_2 równoległe, R_1, R_4, R_2 z R_5 szeregowo, wobec tego otrzymujemy

$$R_0 = \frac{R_2(R_1 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_4} + R_5 \quad (10.42)$$

Ostatecznie dostajemy z metody Nortona wzór (10.33) prąd I w rozwiązywanej gałęzi

$$I = \frac{R_0}{R_0 + R_3} J_0 \quad (10.43)$$

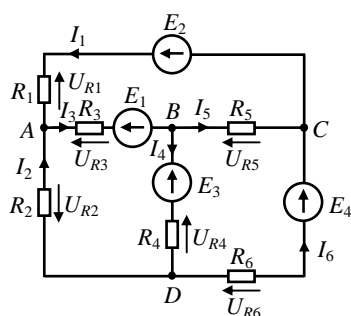
Spadek napięcia na rezystorze R_3 wyraża się wzorem

$$U_{R_3} = R_3 I \quad (10.44)$$

10.5. Metoda potencjałów węzłowych

Metoda potencjałów węzłowych polega na ułożeniu $n - 1$ równań z I prawa Kirchhoffa dla węzłów obwodu, gdzie n – ilość niezależnych węzłów obwodu, przy czym potencjał jednego węzła obwodu narzucamy. Prądy gałęziowe opisujemy przez potencjały węzłów, gdzie wyjątkiem jest występowanie źródła prądowego w gałęzi dopływającej do węzła. Metoda potencjałów węzłowych o tak sformułowanej definicji jest stosowana tylko do obwodów, które można przedstawić przez źródła prądowe.

Dla przykładu rozpatrzmy obwód elektryczny rys. 10.11, w którym znane są wartości sił elektromotorycznych źródeł napięciowych E_1, E_2, E_3, E_4 i wartości rezystancji rezystorów $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$. Szukamy prądów gałęziowych $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$ oraz spadków napięć na rezystorach $U_{R_1}, U_{R_2}, U_{R_3}, U_{R_4}, U_{R_5}, U_{R_6}$.



Rys. 10.11. Rozwiązywany obwód

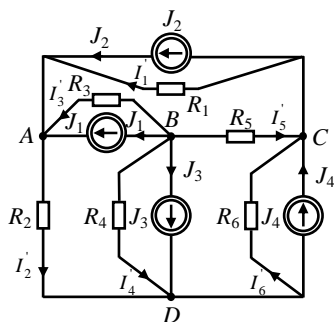
Zgodnie z podaną definicją przekształcamy źródła napięciowe E_1, E_2, E_3, E_4 na rzeczywiste źródła prądu (rys. 10.12) J_1, J_2, J_3, J_4 .

$$J_1 = \frac{E_1}{R_3} \quad (10.45)$$

$$J_2 = \frac{E_2}{R_1} \quad (10.46)$$

$$J_3 = \frac{E_3}{R_4} \quad (10.47)$$

$$J_4 = \frac{E_4}{R_6} \quad (10.48)$$



Dla obwodu otrzymujemy następujące równania z I prawa Kirchhoffa dla węzła A, B, C

$$\begin{cases} J_2 + I_1' + J_1 + I_3' - I_2' = 0 \\ -J_1 - I_3' - I_4' - J_3 - I_5' = 0 \\ -J_2 - I_1' + I_5' + I_6' + J_4 = 0 \end{cases} \quad (10.49)$$

Rys. 10.12. Rozwiązywany obwód z przekształconymi źródłami napięciowymi

Dla prądów gałęziowych przedstawionych przez potencjały węzłów, dla $V_D = 0$

$$I_1' = \frac{V_C - V_A}{R_1} \quad (10.50)$$

$$I_2' = \frac{V_A - V_D}{R_2} = \frac{V_A}{R_2} \quad (10.51)$$

$$I_3' = \frac{V_B - V_A}{R_3} \quad (10.52)$$

$$I_4' = \frac{V_B - V_D}{R_4} = \frac{V_B}{R_4} \quad (10.53)$$

$$I_5' = \frac{V_B - V_C}{R_5} \quad (10.54)$$

$$I_6' = \frac{V_D - V_C}{R_6} = -\frac{V_C}{R_6} \quad (10.55)$$

po przekształceniu układu równań (10.49) względem szukanych potencjałów V_A , V_B , V_C , otrzymujemy

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)V_A - \frac{1}{R_3}V_B - \frac{1}{R_1}V_C = J_1 + J_2 \\ -\frac{1}{R_3}V_A + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right)V_B - \frac{1}{R_5}V_C = -J_1 - J_3 \\ -\frac{1}{R_1}V_A - \frac{1}{R_5}V_B + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}\right)V_C = -J_2 + J_4 \end{cases} \quad (10.56)$$

Z II prawa Kirchhoffa dla obwodu z rys. 10.11 możemy napisać

$$U_{AC} + U_{R1} - E_2 = 0 \quad (10.57)$$

gdzie $U_{AC} = V_A - V_C$, $U_{R1} = R_1 I_1$.

Wówczas otrzymujemy równanie, z którego możemy wyznaczyć prąd gałęziowy I_1

$$I_1 = \frac{-V_A + V_C + E_2}{R_1} \quad (10.58)$$

Analogicznie otrzymujemy zależności na pozostałe prądy gałęziowe, tzn. I_2 , I_3 , I_4 , I_5 , I_6

$$I_2 = \frac{-V_A}{R_2} \quad (10.59)$$

$$I_3 = \frac{V_A - V_B - E_1}{R_3} \quad (10.60)$$

$$I_4 = \frac{V_B + E_3}{R_4} \quad (10.61)$$

$$I_5 = \frac{V_B - V_C}{R_5} \quad (10.62)$$

$$I_6 = \frac{-V_C + E_4}{R_6} \quad (10.63)$$

Spadki napięcia na rezystorach obwodu R_1 , R_2 , R_3 , R_4 , R_5 , R_6 wyrażają się wzorami

$$U_{R1} = R_1 I_1 \quad (10.64)$$

$$U_{R2} = R_2 I_2 \quad (10.65)$$

$$U_{R3} = R_3 I_3 \quad (10.66)$$

$$U_{R4} = R_4 I_4 \quad (10.67)$$

$$U_{R5} = R_5 I_5 \quad (10.68)$$

$$U_{R6} = R_6 I_6 \quad (10.69)$$

11. NAPIĘCIA I PRĄDY SINUSOIDALNE

11.1. Napięcia i prądy sinusoidalne jednofazowe

Napięcia i prądy sinusoidalne opisują równania

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u) \quad (11.1)$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i) \quad (11.2)$$

gdzie u , i – wartości chwilowe napięcia i prądu, U_m – wartość maksymalna amplitudy napięcia, I_m – wartość maksymalna amplitudy prądu, ω – pulsacja albo tzw. częstotliwość kątowna, φ_u – przesunięcie fazowe przebiegu napięcia, φ_i – przesunięcie fazowe przebiegu prądu.

Pulsacja wyraża się wzorem

$$\omega = 2\pi f, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad f = \frac{1}{T} \quad (11.3)$$

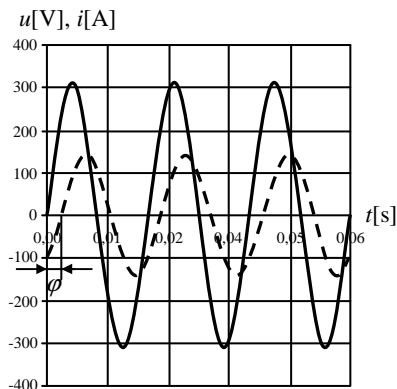
gdzie f – częstotliwość przebiegu, T – okres przebiegu.

Pulsację mierzymy w radianach na sekundę. Wymiarem pulsacji jest s^{-1} .

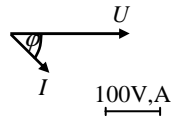
Przesunięciem fazowym przebiegu napięcia i prądu nazywamy różnicę pomiędzy kątem przesunięcia przebiegu napięcia a kątem przesunięcia przebiegu prądu

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i \quad (11.4)$$

Na rys. 11.1 przedstawiono przebiegi czasowe napięcia i prądu sinusoidalnego sieciowego dla $U_m = \sqrt{2} 220 \text{ V}$, $I_m = \sqrt{2} 100 \text{ A}$, $f = 50 \text{ Hz}$, $\varphi_u = 0$, $\varphi_i = -45^\circ$, ($\varphi_i = -\pi/4$), kąt przesunięcia fazowego pomiędzy przebiegiem napięcia a przebiegiem prądu wynosi $\varphi = 45^\circ$ lub przesunięcie w czasie o $t = T/8$, gdzie przebieg napięcia wyprzedza przebieg prądu.



Rys. 11.1. Przebieg w czasie napięcia i prądu sinusoidalnego sieciowego, wartości maksymalne $U_m = \sqrt{2} 220 \text{ V}$, $I_m = \sqrt{2} 100 \text{ A}$, $f = 50 \text{ Hz}$, $\varphi_u = 0$, $\varphi_i = -45^\circ$ ($\varphi_i = -\pi/4$), kąt przesunięcia fazowego pomiędzy przebiegiem napięcia a przebiegiem prądu wynosi $\varphi = 45^\circ$



Na rys. 11.2 przedstawiono wykres wskazowy napięcia i prądu dla wartości skutecznych dla rozważanego przypadku.

Rys. 11.2. Wykres wskazowy napięcia i prądu dla wartości skutecznych

Wartościami charakterystycznymi dla przebiegu sinusoidalnego napięcia i prądu jest wartość skuteczna oraz wartość średnia.

Wartością skuteczną przebiegu okresowego, jakim jest przebieg sinusoidalny, nazywamy taką wartość równoważnego prądu stałego, który by w takim samym czasie, równym jednemu okresowi, wydzielił w tym samym rezystorze taką samą ilość ciepła.

Wartość skuteczna dla przebiegu okresowego liczona jest według wzoru

$$A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt} \quad (11.5)$$

Wartością średnią przebiegu okresowego nazywamy wartość średnią tego przebiegu za okres.

Wartość średnia dla przebiegu okresowego liczona jest według wzoru

$$A = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (11.6)$$

Dla przebiegów sinusoidalnych napięcia i prądu wartości skuteczne mają wartość

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}, \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad (11.7)$$

a wartości średnie

$$\bar{U} = 0,636U_m, \quad \bar{I} = 0,636I_m \quad (11.8)$$

Często w analizie obwodów elektrycznych dla napięć i prądów sinusoidalnych stosuje się zapis w postaci zespolonej. Stosujemy wówczas następujące przekształcenie

$$\underline{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi_u} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} (\cos \varphi_u + j \sin \varphi_u) \quad (11.9)$$

$$\underline{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi_i} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} (\cos \varphi_i + j \sin \varphi_i) \quad (11.10)$$

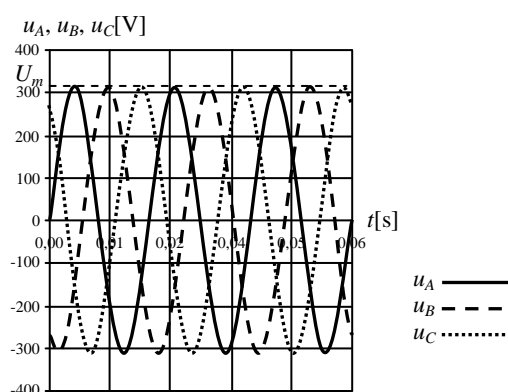
11.2. Napięcia sinusoidalne trójfazowe, układ zgodny symetryczny

We współczesnej energetyce występują przebiegi napięcia i prądu sinusoidalnego trójfazowego. Energia elektryczna powstaje w generatorach prądotwórczych. Na rys. 11.3 przedstawiono przebiegi napięć sinusoidalnych trójfazowych układu zgodnego symetrycznego, przesuniętych względem siebie o kąt $\alpha = 120^\circ$ lub czas $t = T/3$. Napięcie u_A wyprzedza napięcie u_B , natomiast napięcie u_B wyprzedza napięcie u_C . Wartości maksymalne napięć w układzie symetrycznym są sobie równe tzn. $U_{Am} = U_{Bm} = U_{Cm}$.

$$u_A = U_{Am} \sin(\omega t + \phi_u) \quad (11.11)$$

$$u_B = U_{Bm} \sin\left(\omega t + \phi_u - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (11.12)$$

$$u_C = U_{Cm} \sin\left(\omega t + \phi_u - \frac{4\pi}{3}\right) \quad (11.13)$$

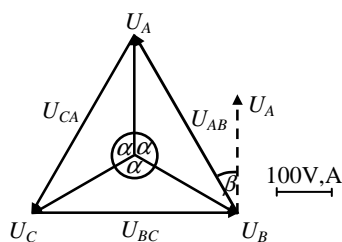


Rys. 11.3. Przebieg w czasie sieciowego napięcia sinusoidalnego trójfazowego,
 $U_{Am} = U_{Bm} = U_{Cm} = \sqrt{2} \cdot 220 \text{ V}$, $\phi_u = 0$, $f = 50 \text{ Hz}$

W dowolnej chwili t suma napięć chwilowych trzech faz przebiegów sinusoidalnych wynosi zero

$$u_A(t) + u_B(t) + u_C(t) = 0 \quad (11.14)$$

Dla układu trójfazowego wprowadza się wykres wskazowy wartości skutecznych napięć, rys. 11.4.



Rys. 11.4. Wykres wskazowy napięć układu trójfazowego symetrycznego dla wartości skutecznych, $U_A = U_B = U_C = 220 \text{ V}$,
 $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = \sqrt{3} U_A$, $\alpha = 120^\circ$,
 $\beta = 30^\circ$

Z wykresu wskazowego można zauważyć, że wartości napięcia międzyfazowego U_{AB} , U_{BC} , U_{CA} są $\sqrt{3}$ razy większe od wartości fazowych U_A , U_B , U_C oraz, że wektory napięć międzyfazowych wyprzedzają w czasie o kąt $\beta = 30^\circ$ wektory napięć fazowych.

Napięcia międzyfazowe opisują wzory

$$u_{AB} = \sqrt{3}U_{Am} \sin(\omega t + \phi_u + 30^\circ) \quad (11.15)$$

$$u_{BC} = \sqrt{3}U_{Bm} \sin\left(\omega t + \phi_u - \frac{2\pi}{3} + 30^\circ\right) \quad (11.16)$$

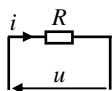
$$u_{CA} = \sqrt{3}U_{Cm} \sin\left(\omega t + \phi_u - \frac{4\pi}{3} + 30^\circ\right) \quad (11.17)$$

12. ELEMENTY IDEALNE R , L , C ZASILANE NAPIĘCIEM SINUSOIDALNYM

Przy analizie elementów idealnych zasilanych napięciem sinusoidalnym będziemy rozpatrywać opóźnienia czasowe występujące pomiędzy przebiegami napięć i przebiegami prądów. Podane zostaną wielkości charakteryzujące elementy pod kątem przewodności prądu mianowicie rzeczywiste (rezystancja) i urojone (reaktancja).

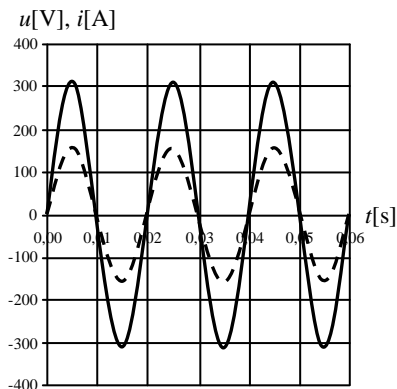
12.1. Rezystor idealny R zasilany napięciem sinusoidalnym

Przy zasilaniu idealnego rezystora R napięciem sinusoidalnym u , (rys. 12.1)



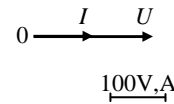
$$u = U_m \sin(\omega t + \phi_u) \quad (12.1)$$

Rys. 12.1. Rezystor idealny R zasilany napięciem sinusoidalnym



Rys. 12.2. Przebieg czasowy napięcia i prądu na rezystorze dla napięcia zasilania $U = 220 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$ i $R = 2 \Omega$

gdzie $U_m = \sqrt{2}U$, U – wartość skuteczna napięcia, przebieg napięcia na rezystorze jest w fazie z przebiegiem prądu, czyli przesunięcie fazowe $\varphi = 0$.



Rys. 12.3. Wykres wskazowy wartości skutecznych napięcia i prądu na rezystorze dla napięcia zasilania $U = 220 \text{ V}$ i $R = 2 \Omega$

Prąd chwilowy będzie odpowiadał

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_u) \quad (12.2)$$

gdzie

$$I_m = \frac{U_m}{R} \quad (12.3)$$

Rozpatrując wartości skuteczne napięcia i prądu na rezystorze, czyli dzieląc amplitudę przebiegów przez $\sqrt{2}$, otrzymujemy

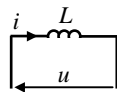
$$I = \frac{U}{R} \quad (12.4)$$

Reasumując, idealny rezystor zasilany napięciem sinusoidalnym, charakteryzuje się tylko rezystancją R , bowiem jego reaktancja X jest równa zero

$$R \neq 0, \quad X = 0 \quad (12.5)$$

12.2. Cewka idealna L zasilana napięciem sinusoidalnym

Przy zasilaniu idealnej cewki L napięciem sinusoidalnym u , (rys. 12.4)



$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u) \quad (12.6)$$

Rys. 12.4. Cewka idealna L zasilana napięciem sinusoidalnym

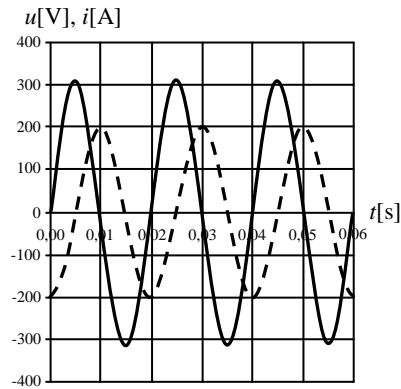
przebieg napięcia na cewce wyprzedza przebieg prądu o kąt 90° , czyli przesunięcie fazowe $\varphi = 90^\circ$.

Prąd chwilowy będzie odpowiadał

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_u - 90^\circ) \quad (12.7)$$

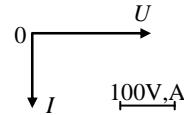
gdzie

$$I_m = \frac{U_m}{X_L} \quad (12.8)$$



Rys. 12.5. Przebieg czasowy napięcia i prądu na cewce dla napięcia zasilania $U = 220$ V, $f = 50$ Hz i $L = 5$ mH

u ———
 i - - -



Rys. 12.6. Wykres wskazowy wartości skutecznych napięcia i prądu na cewce dla napięcia zasilania $U = 220$ V, $f = 50$ Hz i $L = 5$ mH

Wielkość X_L jest reaktancją indukcyjną (oporem indukcyjnym dla prądu).

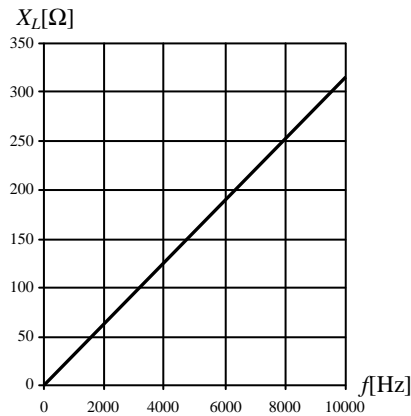
Reaktancja indukcyjna jest równa iloczynowi pulsacji ω i indukcyjności L cewki

$$X_L = \omega L \Rightarrow X_L = 2\pi f L, \quad \omega = 2\pi f \quad (12.9)$$

Jednostką reaktancji indukcyjnej X_L jest om (Ω).

Rozpatrując wartości skuteczne napięcia i prądu na cewce, czyli dzieląc amplitudę przebiegów przez $\sqrt{2}$, otrzymujemy

$$I = \frac{U}{X_L} \quad (12.10)$$



Rys. 12.7. Zależność reaktancji indukcyjnej cewki $X_L = f(f)$ o indukcyjności $L = 5$ mH od częstotliwości

Reasumując, idealna cewka zasilana napięciem sinusoidalnym charakteryzuje się tylko reaktancją indukcyjną X_L , bowiem jej rezystancja R jest równa zero

$$X_L \neq 0, \quad R = 0 \quad (12.11)$$

12.3. Kondensator idealny C zasilany napięciem sinusoidalnym

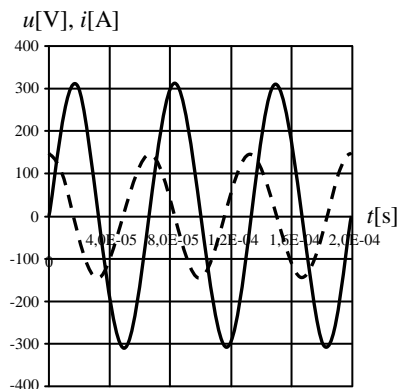
Przy zasilaniu idealnego kondensatora C napięciem sinusoidalnym u , (rys. 12.8)



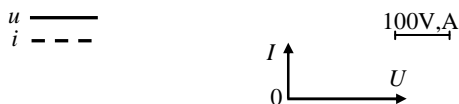
$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u) \quad (12.12)$$

Rys. 12.8. Kondensator idealny C zasilany napięciem sinusoidalnym

przebieg napięcia na kondensatorze opóźnia się względem przebiegu prądu o kąt 90° , czyli przesunięcie fazowe wynosi $\varphi = -90^\circ$.



Rys. 12.9. Przebieg czasowy napięcia i prądu na kondensatorze dla napięcia zasilania $U = 220 \text{ V}$, $f = 15 \text{ kHz}$ i $C = 5 \mu\text{F}$



Rys. 12.10. Wykres wskazowy wartości skutecznych napięcia i prądu na kondensatorze dla napięcia zasilania $U = 220 \text{ V}$, $f = 15 \text{ kHz}$ i $C = 5 \mu\text{F}$

Prąd chwilowy będzie odpowiadał

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_u + 90^\circ) \quad (12.13)$$

gdzie

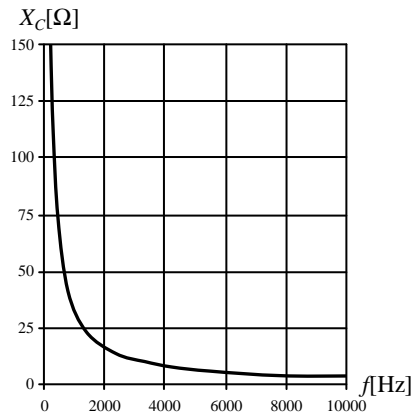
$$I_m = \frac{U_m}{X_C} \quad (12.14)$$

Wielkość X_C jest reaktancją pojemnościową (oporem pojemnościowym dla prądu).

Reaktancja pojemnościowa kondensatora jest odwrotnie proporcjonalna do iloczynu pulsacji ω i pojemności C

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow X_C = \frac{1}{2\pi f C}, \quad \omega = 2\pi f \quad (12.15)$$

Jednostką reaktancji pojemnościowej X_C jest om (Ω).



Rys. 12.11. Zależność reaktancji pojemnościowej $X_C = f(f)$ kondensatora o pojemności $C = 5 \mu\text{F}$ od częstotliwości

Rozpatrując wartości skuteczne napięcia i prądu na kondensatorze, czyli dzieląc amplitudę przebiegów przez $\sqrt{2}$, otrzymujemy

$$I = \frac{U}{X_C} \quad (12.16)$$

Reasumując, idealny kondensator zasilany prądem sinusoidalnym charakteryzuje się tylko reaktancją pojemnościową X_C , bowiem jego rezystancja R jest nieskończenie wielka

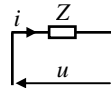
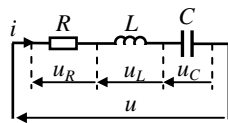
$$X_C \neq 0, R \rightarrow \infty \quad (12.17)$$

13. OBWÓD SZEREGOWY RLC , REZONANS NAPIĘĆ I TRÓJKĄT IMPEDANCJI

Rozważmy obwód szeregowy RLC zasilany napięciem sinusoidalnym u , (rys. 13.1)

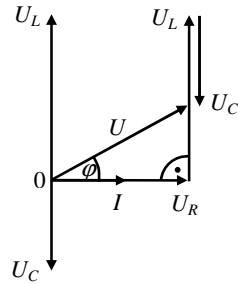
$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u) \quad (13.1)$$

gdzie $U_m = \sqrt{2}U$, U – wartość skuteczna napięcia.



Rys. 13.1. Obwód szeregowy RLC

Zgodnie z teorią podaną w rozdziale 12, prąd i płynący w obwodzie szeregowym wywołuje spadek napięcia na rezystorze R , przebieg prądu i napięcia na rezystorze jest zgodny w fazie, prąd i wywołuje spadek napięcia na cewce L , przebieg prądu opóźniony jest względem przebiegu napięcia na cewce o kąt 90° , oraz prąd i wywołuje spadek napięcia na kondensatorze C , przebieg prądu wyprzedza przebieg napięcia na kondensatorze o kąt 90° . Dla układu z rys. 13.1 możemy narysować wykres wskazowy napięcia i prądu, rys. 13.2



Rys. 13.2. Wykres wskazowy napięcia i prądu w obwodzie szeregowym RLC dla wartości skutecznych

Po podaniu napięcia sinusoidalnego na obwód RLC popłynie prąd o wartości skutecznej

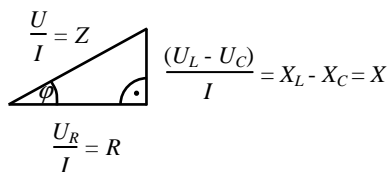
$$I = \frac{U}{Z} \quad (13.2)$$

gdzie Z – impedancja obwodu szeregowego RLC , która wyraża się wzorem

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (13.3)$$

Jednostką impedancji jest om (Ω).

Wzór na impedancję (13.3) wynika z trójkąta impedancji, który jest podobny do trójkąta napięć wykresu wskazowego i powstaje on przez podzielenie wskazów napięcia przez prąd I .



Rys. 13.3. Trójkąt impedancji gałęzi szeregowej RLC powstały z trójkąta napięć wykresu wskazowego

Kąt φ jest przesunięciem fazowym pomiędzy przebiegiem napięcia zasilającego a przebiegiem prądu w obwodzie szeregowym RLC . Wyraża się wzorem

$$\varphi = \begin{cases} \arccos\left(\frac{R}{Z}\right) & \text{dla } X_L > X_C \\ -\arccos\left(\frac{R}{Z}\right) & \text{dla } X_L < X_C \end{cases} \quad (13.4)$$

Napięcie skuteczne na rezystorze R , cewce L oraz kondensatorze C opisane są wzorami

$$U_R = RI \quad (13.5)$$

$$U_L = X_L I \quad (13.6)$$

$$U_C = X_C I \quad (13.7)$$

Często przy analizie obwodów elektrycznych napięć i prądów sinusoidalnych stosuje się metodę liczb zespolonych. Przedstawia się wówczas przebiegi napięcia źródeł zasilających w postaci zespolonej

$$\underline{U} = A + jB \quad (13.8)$$

lub

$$\underline{U} = Ue^{j\varphi} = U(\cos\varphi + j\sin\varphi) \quad (13.9)$$

gdzie A , B – stałe źródła, część rzeczywista i urojona, φ – wyraża się wzorem analogicznym do równania (13.4).

W podobny sposób przedstawia się przebiegi prądów w obwodzie i jego impedancje.

Przy rozpatrywaniu obwodu szeregowego RLC dla wartości chwilowych, przy sinusoidalnym napięciu zasilania, równanie (13.1), otrzymamy prąd w obwodzie

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_u - \varphi), \quad I_m = \frac{U_m}{Z} \quad (13.10)$$

gdzie φ dane jest wzorem (13.4).

Napięcie na rezystorze R będzie w fazie z prądem obwodu

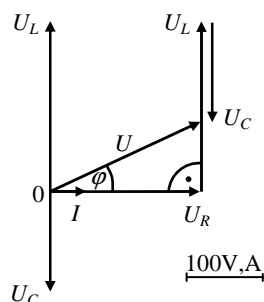
$$u_R = RI_m \sin(\omega t + \varphi_u - \varphi) \quad (13.11)$$

natomiast na cewce będzie przyspieszone a na kondensatorze opóźnione o kąt 90°

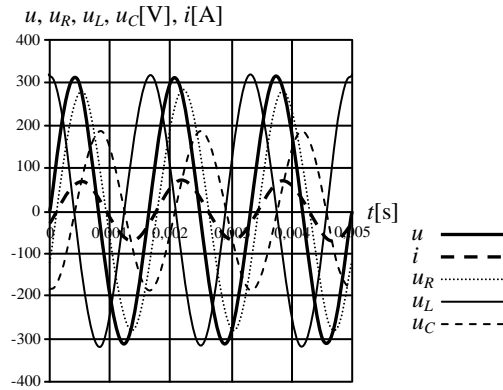
$$u_L = X_L I_m \sin(\omega t + \varphi_u - \varphi + 90^\circ) \quad (13.12)$$

$$u_C = X_C I_m \sin(\omega t + \varphi_u - \varphi - 90^\circ) \quad (13.13)$$

Na rys. 13.4 przedstawiono wykres wskazowy napięć i prądu, natomiast na rys. 13.5 przebiegi czasowe napięć i prądu w obwodzie szeregowym RLC dla $U = 220$ V, $\varphi_u = 0$, $f = 600$ Hz, $R = 4$ Ω , $L = 1,2$ mH, $C = 100$ μ F.



Rys. 13.4. Wykres wskazowy napięcia i prądu w obwodzie szeregowym RLC dla wartości skutecznych dla $U = 220$ V, $f = 600$ Hz, $R = 4$ Ω , $L = 1,2$ mH, $C = 100$ μ F



Rys. 13.5. Przebieg czasowy napięć i prądu w obwodzie szeregowym RLC dla $U = 220 \text{ V}$, $\varphi_u = 0$, $f = 600 \text{ Hz}$, $R = 4 \Omega$, $L = 1,2 \text{ mH}$, $C = 100 \mu\text{F}$

Po obliczeniach obwodu szeregowego RLC dla $U = 220 \text{ V}$, $\varphi_u = 0$, $f = 600 \text{ Hz}$, $R = 4 \Omega$, $L = 1,2 \text{ mH}$, $C = 100 \mu\text{F}$ otrzymano następujące wyniki obliczeń, wartość skuteczną napięcia na rezystorze $U_R = 199,2 \text{ V}$, wartość skuteczną napięcia na cewce $U_L = 225,3 \text{ V}$, wartość skuteczną napięcia na kondensatorze $U_C = 132,1 \text{ V}$, wartość skuteczną prądu w obwodzie $I = 49,8 \text{ A}$, przesunięcie fazowe pomiędzy przebiegiem napięcia zasilającego a przebiegiem prądu obwodu wynosi $\varphi = 25,07^\circ$.

Jeżeli reaktancja indukcyjna równa jest reaktancji pojemnościowej w obwodzie szeregowym RLC , tzn. $X_L = X_C$, dochodzi do rezonansu napięć. Spadek napięcia na cewce L równa się spadkowi napięcia na kondensatorze C , tzn. $U_L = U_C$ z tą różnicą, że napięcia są odwrócone w fazie o kąt 180° . **W przypadku rezonansu napięć może dochodzić do przepięć na elementach obwodu.**

Do rezonansu napięć można doprowadzić na trzy sposoby

1. Przez dobór indukcyjności

$$X_L = X_C \Rightarrow 2\pi fL = \frac{1}{2\pi fC} \Rightarrow L = \frac{1}{4\pi^2 f^2 C} \quad (13.14)$$

2. Przez dobór pojemności

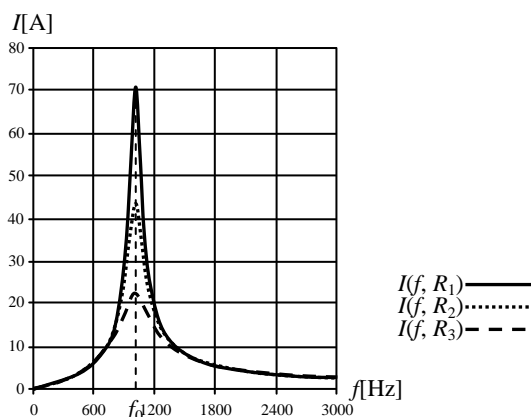
$$C = \frac{1}{4\pi^2 f^2 L} \quad (13.15)$$

3. Przez dobór częstotliwości napięcia zasilania

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (13.16)$$

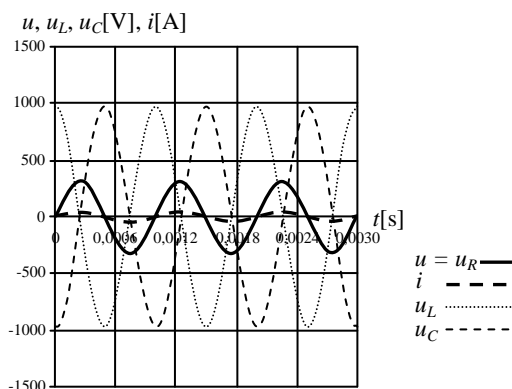
W stanie rezonansu obwodu impedancja obwodu równa jest rezystancji $\underline{Z} = R$, a prąd ogranicza tylko rezystancja

$$I = \frac{U}{R} \quad (13.17)$$

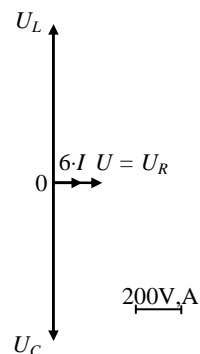


Rys. 13.6. Zależność prądu w obwodzie szeregowym RLC w zależności od częstotliwości $I = f(f)$ dla różnych wartości rezystancji, wartości skuteczne dla $U = 220 \text{ V}$, $R_1 = 3 \Omega$, $R_2 = 5 \Omega$, $R_3 = 10 \Omega$

Na rys. 13.7 przedstawiono przebiegi czasowe napięć i prądu, natomiast na rys. 13.8 wykres wskazowy napięć i prądu w obwodzie szeregowym RLC w stanie rezonansu napięć dla $U = 220 \text{ V}$, $\varphi_u = 0$, $f_0 = 1000 \text{ Hz}$, $R = 10 \Omega$, $L = 5 \text{ mH}$, $C \approx 5,07 \mu\text{F}$.



Rys. 13.7. Przebieg czasowy napięć i prądu w obwodzie szeregowym RLC w stanie rezonansu dla $U = 220 \text{ V}$, $\varphi_u = 0$, $f_0 = 1000 \text{ Hz}$, $R = 10 \Omega$, $L = 5 \text{ mH}$, $C \approx 5,07 \mu\text{F}$

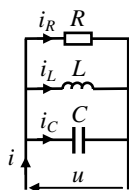


Rys. 13.8. Wykres wskazowy napięcia i prądu w obwodzie szeregowym RLC w stanie rezonansu dla $U = 220 \text{ V}$, $f_0 = 1000 \text{ Hz}$, $R = 10 \Omega$, $L = 5 \text{ mH}$, $C \approx 5,07 \mu\text{F}$

Po obliczeniach obwodu szeregowego RLC w stanie rezonansu dla $U = 220 \text{ V}$, $f_0 = 1000 \text{ Hz}$, $R = 10 \Omega$, $L = 5 \text{ mH}$, $C \approx 5,07 \mu\text{F}$ otrzymano następujące wyniki obliczeń, wartość skuteczna napięcia na rezystorze $U_R = U$, wartość skuteczna napięcia na cewce i kondensatorze $U_L = U_C = 691,1 \text{ V}$, wartość skuteczna prądu w obwodzie $I = 22 \text{ A}$, kąt przesunięcia fazowego pomiędzy przebiegiem napięcia zasilającego a przebiegiem prądu obwodu wynosi $\varphi = 0$, czyli przebieg napięcia zasilającego w stanie rezonansu napięć jest w fazie z przebiegiem prądu w obwodzie.

14. OBWÓD RÓWNOLEGŁY RLC , REZONANS PRĄDÓW I TRÓJKĄT ADMITANCJI

Rozważmy obwód równoległy RLC zasilany napięciem sinusoidalnym u , (rys.14.1)



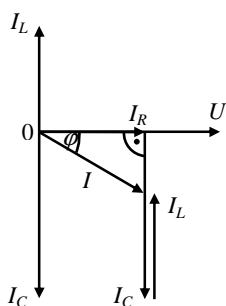
$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u) \quad (14.1)$$

Rys. 14.1. Obwód równoległy RLC

gdzie $U_m = \sqrt{2} U$, U – wartość skuteczna napięcia.

Zgodnie z teorią podaną w rozdziale 12, pod wpływem przyłożonego napięcia u w obwodzie równoległym popłynie prąd i_R w gałęzi z rezystorem R , prąd i_R jest w fazie z napięciem zasilającym u , w gałęzi z cewką L popłynie prąd i_L , prąd i_L opóźniony jest o kąt 90° względem napięcia zasilającego u , oraz w gałęzi z kondensatorem C popłynie prąd i_C , który wyprzedza o kąt 90° napięcie zasilania u .

Dla układu z rys. 14.1 możemy narysować wykres wskazowy napięcia i prądu



Rys. 14.2. Wykres wskazowy napięcia i prądu obwodu równoległego RLC dla wartości skutecznych

Po podaniu napięcia sinusoidalnego na obwód równoległy RLC w gałęzi rezystora R popłynie prąd o wartości skutecznej

$$I_R = \frac{U}{R} = GU, \quad G = \frac{1}{R} \quad (14.2)$$

gdzie G – konduktancja, której jednostką jest siemens (S).

W gałęzi cewki L i kondensatora C prąd będzie wynosić odpowiednio

$$I_L = \frac{U}{X_L} = B_L U, \quad B_L = \frac{1}{X_L} \quad (14.3)$$

$$I_C = \frac{U}{X_C} = B_C U, \quad B_C = \frac{1}{X_C} \quad (14.4)$$

gdzie B_L oraz B_C – susceptancja indukcyjna i pojemnościowa. Jednostką susceptancji w układzie SI jest simens (S).

Prąd wypadkowy obwodu I możemy wyznaczyć z trójkąta prostokątnego powstałego ze wskazów wektorów prądu, rys. 14.2

$$I^2 = I_R^2 + (I_L - I_C)^2 \Rightarrow I = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2} \quad (14.5)$$

lub korzystając z wielkości admitancji obwodu Y

$$I = YU \quad (14.6)$$

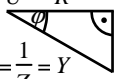
gdzie admitancja Y wyraża się wzorem

$$Y = \sqrt{G^2 + (S_L - S_C)^2} \quad (14.7)$$

lub gdy znana jest impedancja obwodu równoległego RLC

$$Y = \frac{1}{Z} \quad (14.8)$$

Jednostką admitancji podobnie jak w przypadku susceptancji jest simens (S). Wzór na admitancję (14.7) wynika z trójkąta admitancji, który jest podobny do trójkąta prądów wykresu wskazowego i powstaje on przez podzielenie wskazów prądu przez napięcie U .

$$\frac{I_R}{U} = \frac{1}{R} = G$$


$$\frac{I_L - I_C}{U} = \frac{1}{X_L - X_C} = B_L - B_C = B$$

$$\frac{I}{U} = \frac{1}{Z} = Y$$

Rys. 14.3. Trójkąt admitancji obwodu równoległego RLC powstały z trójkąta prądów wykresu wskazowego

Kąt φ jest przesunięciem fazowym pomiędzy przebiegiem napięcia zasilającego u a przebiegiem prądu obwodu równoległego RLC . Wyraża się wzorem

$$\varphi = \begin{cases} \arccos\left(\frac{G}{Y}\right) & \text{dla } B_L > B_C \\ -\arccos\left(\frac{G}{Y}\right) & \text{dla } B_L < B_C \end{cases} \quad (14.9)$$

Często przy analizie obwodów elektrycznych stosuje się metodą liczb zespolonych. Przedstawia się wówczas napięcie zasilające w postaci zespolonej

$$\underline{U} = A + jB \quad \text{lub} \quad \underline{U} = U(\cos \varphi + j \sin \varphi) \quad (14.10, 14.11)$$

gdzie A , B – stałe źródła, część rzeczywista i urojona, φ – wyraża się wzorem analogicznym do równania (14.9).

W podobny sposób przedstawia się przebiegi prądów w obwodzie i jego admitancję.

Przy rozpatrywaniu gałęzi równoległej RLC dla wartości chwilowych, przy sinusoidalnym napięciu zasilania równanie (14.1), otrzymujemy następujące równanie prądu na rezystorze

$$i_R = I_{Rm} \sin(\omega t + \varphi_u), \quad I_{Rm} = U_m G \quad (14.12)$$

na cewce i kondensatorze

$$i_L = I_{Lm} \sin(\omega t + \varphi_u - 90^\circ), \quad I_{Lm} = U_m B_L \quad (14.13)$$

$$i_C = I_{Cm} \sin(\omega t + \varphi_u + 90^\circ), \quad I_{Cm} = U_m B_C \quad (14.14)$$

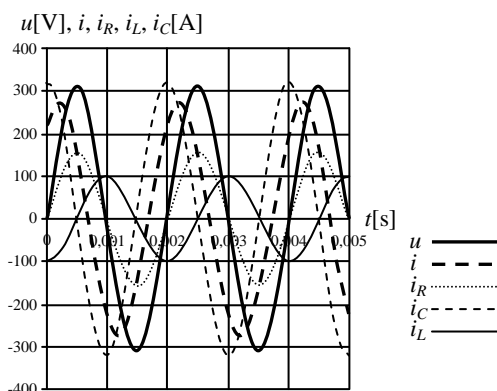
oraz prąd wypadkowy obwodu

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_u - \varphi), \quad I_m = U_m Y \quad (14.15)$$

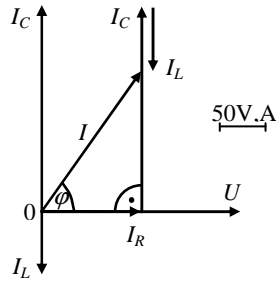
gdzie φ dane jest wzorem (14.9).

Napięcie na rezystorze R , cewce L oraz kondensatorze C w obwodzie równoległym jest równe napięciu zasilania u .

Na rys. 14.14 przedstawiono przebiegi czasowe napięć i prądów, natomiast na rys. 14.15 wykres wskazowy napięć i prądów w obwodzie równoległym RLC dla $U = 220 \text{ V}$, $\varphi_u = 0$, $f = 500 \text{ Hz}$, $R = 2 \Omega$, $L = 1 \text{ mH}$, $C = 330 \mu\text{F}$.



Rys. 14.14. Przebieg czasowy napięć i prądów w obwodzie równoległym RLC dla $U = 220 \text{ V}$, $\varphi_u = 0$, $f = 500 \text{ Hz}$, $R = 2 \Omega$, $L = 1 \text{ mH}$, $C = 330 \mu\text{F}$



Rys. 14.15. Wykres wskazowy napięcia i prądu w obwodzie równoległym RLC dla wartości skutecznych dla $U = 220 \text{ V}$, $f = 500 \text{ Hz}$, $R = 2 \Omega$, $L = 1 \text{ mH}$, $C = 330 \mu\text{F}$

Po obliczeniach obwodu równoległego RLC dla $U = 220 \text{ V}$, $\varphi_u = 0$, $f = 500 \text{ Hz}$, $R = 2 \Omega$, $L = 1 \text{ mH}$, $C = 330 \mu\text{F}$ otrzymano następujące wyniki obliczeń, wartość skuteczna prądu na rezystorze $I_R = 110 \text{ A}$, wartość skuteczna prądu na cewce $I_L = 70 \text{ A}$, wartość skuteczna prądu na kondensatorze $I_C = 228 \text{ A}$, wartość skuteczna prądu w obwodzie $I = 192,5 \text{ A}$, kąt przesunięcia fazowego pomiędzy przebiegiem napięcia zasilającego a przebiegiem prądu obwodu wynosi $\varphi = -55,1^\circ$.

Jeżeli susceptancja indukcyjna równa jest susceptancji pojemnościowej w obwodzie równoległym RLC , tzn. $B_L = B_C$, dochodzi do rezonansu prądów. Prąd płynący przez cewkę L równa się prądowi przepływającemu przez kondensator C , tzn. $I_L = I_C$ z tą różnicą, że prądy są odwrócone w fazie o kąt 180° .

Do rezonansu prądów można doprowadzić na trzy sposoby

1. Przez dobór indukcyjności

$$B_L = B_C \Rightarrow \frac{1}{2\pi fL} = 2\pi fC \Rightarrow L = \frac{1}{4\pi^2 f^2 C} \quad (14.16)$$

2. Przez dobór pojemności

$$C = \frac{1}{4\pi^2 f^2 L} \quad (14.17)$$

3. Przez dobór częstotliwości napięcia zasilania

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (14.18)$$

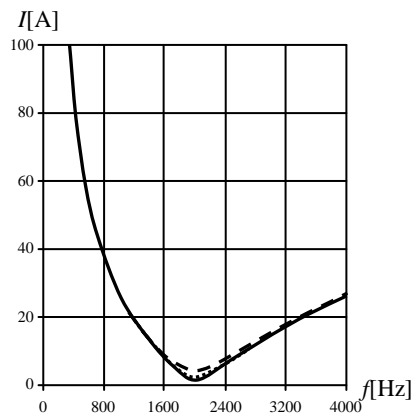
W stanie rezonansu admitancja obwodu równa jest konduktancji $\underline{Y} = G$, czyli prąd wyznacza konduktancja wyrażona przez rezystancję rezystora R

$$I = UG, \quad G = 1/R \quad (14.19)$$

Na rys. 14.16a,b przedstawiono zależności prądu w obwodzie równoległym RLC od częstotliwości $I = f(f)$ dla różnych wartości rezystancji. Wartość skuteczna napięcia zasilania obwodu wynosi $U = 220 \text{ V}$, $R_1 = 50 \Omega$

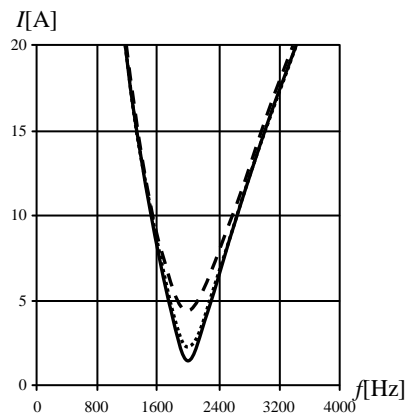
$(G_1 = 0,02 \text{ S}), R_2 = 100 \Omega (G_2 = 0,01 \text{ S}), R_3 = 150 \Omega (G_3 = 0,006 \text{ S}), L = 1 \text{ mH}, C \approx 6,33 \mu\text{F},$ częstotliwość rezonansowa obwodu $f_0 = 2000 \text{ Hz}.$

a)



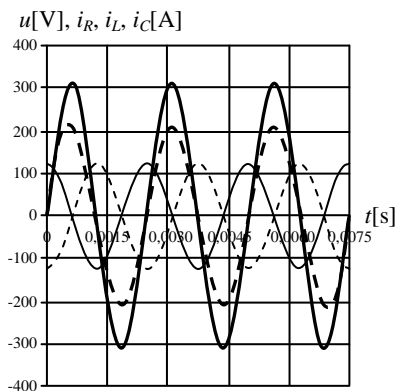
$I(f, G_1)$ - - -
 $I(f, G_2)$
 $I(f, G_3)$ ———

b)



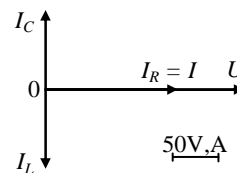
Rys. 14.16a,b) Zależność prądu w obwodzie równoległym RLC od częstotliwości $I = f(f)$ dla różnych wartości konduktancji, wartości skuteczne dla $U = 220 \text{ V}, R_1 = 50 \Omega (G_1 = 0,02 \text{ S}), R_2 = 100 \Omega (G_2 = 0,01 \text{ S}), R_3 = 150 \Omega (G_3 = 0,006 \text{ S}), L = 1 \text{ mH}, C \approx 6,33 \mu\text{F}, f_0 = 2000 \text{ Hz}$

Na rys. 14.17 przedstawiono przebiegi czasowe napięć i prądów, natomiast na rys. 14.18 wykres wskazowy napięć i prądów w obwodzie równoległym RLC w stanie rezonansu prądów dla $U = 220 \text{ V}, \varphi_u = 0, f_0 = 400 \text{ Hz}, R = 1,5 \Omega, L = 1 \text{ mH}, C \approx 158 \mu\text{F}.$



Rys. 14.17. Przebieg czasowy napięć i prądów w obwodzie równoległym RLC w stanie rezonansu dla wartości skutecznych dla $U = 220 \text{ V}, \varphi_u = 0, f_0 = 400 \text{ Hz}, R = 1,5 \Omega, L = 1 \text{ mH}, C \approx 158 \mu\text{F}$

u ———
 i_R - - -
 i_L - · - ·
 i_C ·····



Rys. 14.18. Wykres wskazowy napięć i prądów w obwodzie równoległym RLC w stanie rezonansu dla wartości skutecznych dla $U = 220 \text{ V}, f_0 = 400 \text{ Hz}, R = 1,5 \Omega, L = 1 \text{ mH}, C \approx 158 \mu\text{F}$

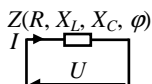
Po obliczeniach obwodu równoległego RLC w stanie rezonansu dla $U = 220 \text{ V}$, $f_0 = 400 \text{ Hz}$, $R = 1,5 \Omega$, $L = 1 \text{ mH}$, $C \approx 158 \mu\text{F}$ otrzymano następujące wyniki obliczeń, wartość skuteczną prądu w gałęzi rezystora i zarazem prąd wypadkowy przepływający przez obwód równoległy RLC wynosi $I_R = I = 146,6 \text{ A}$, wartość skuteczną prądu w gałęzi cewki $I_L = 87,5 \text{ A}$, wartość skuteczną prądu w gałęzi kondensatora $I_C = 87,5 \text{ A}$, przebieg napięcia zasilającego w stanie rezonansu jest w fazie z przebiegiem prądu, czyli $\varphi = 0$.

15. MOC ODBIORNIKA JEDNOFAZOWEGO I TRÓJFAZOWEGO

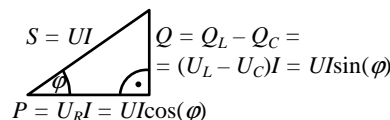
15.1. Moc odbiornika jednofazowego, trójkąt mocy

Dla wygody, dla odbiorników rezystancyjno – reaktancyjnych zasilanych napięciem sinusoidalnym, wprowadza się trójkąt mocy podobny do trójkąta napięć czy impedancji. Powstaje on przez przemnożenie trójkąta napięć dla wykresu wskazowego gałęzi RLC przez prąd I . Trójkąt mocy ilustruje pobór mocy przez odbiornik rezystancyjno – reaktancyjny.

Każdy odbiornik rezystancyjno – reaktancyjny można przedstawić jako impedancję Z złożoną z szeregowego połączenia rezystora R i elementu reaktancyjnego X .



Rys. 15.1. Odbiornik o impedancji Z zasilany napięciem sinusoidalnym



Rys. 15.2. Trójkąt mocy odbiornika o impedancji Z utworzony z trójkąta napięć

Wyróżniamy trzy rodzaje mocy

1. Moc pozorną $S = UI$, której jednostką jest woltoamper ($\text{V} \cdot \text{A}$). Moc pozorną jest sumą geometryczną mocy czynnej P oraz mocy biernej Q . Mówi nam, jakie obciążenie mocy dla źródła energii stanowi odbiornik, między innymi jaki będzie przepływał prąd.
2. Moc czynna $P = UI \cos(\varphi)$, której jednostką jest wat (W). Moc czynna mówi, ile energii w odbiorniku zostanie przetworzone na inny rodzaj energii, np. ciepło, moc mechaniczną. Moc czynna odbiornika zawiera moc czynną odbiornika użyteczną oraz moc czynną odbiornika strat, np. straty mocy w przewodach.
3. Moc bierna $Q = UI \sin(\varphi)$, której jednostką jest war (Var). Moc bierna określa moc potrzebną do wytworzenia pola magnetycznego lub elektrycznego w obwodzie i wiąże się z przenikalnością magnetyczną μ lub

elektryczną ε ośrodka w zależności od charakteru reaktancyjnego obwodu, magnetycznego lub pojemnościowego. Moc bierna nie jest przetwarzana na inny rodzaj energii, lecz krąży w obwodzie. Niestety wymusza większy pobór mocy pozornej, zatem większy prąd co pociąga za sobą większe straty mocy czynnej np. w przewodach przewodzących prąd. Dlatego też tam gdzie jest to wskazane, na przykład w energetyce, dąży się do kompensacji mocy biernej.

Współczynnik $\cos(\varphi)$ nazywamy współczynnikiem mocy odbiornika. Określa on stosunek pobieranej mocy czynnej P do mocy pozornej S .

W energetyce przy kompensacji mocy biernej Q pobieranej przez odbiorniki rezystancyjno – reaktancyjne, dąży się by $\cos(\varphi)$ był bliski jedności. Wówczas moc bierna Q zanika i nie dochodzi do groźnych w sieci rezonansów napięć i prądów. Niekiedy przy analizie obwodów prądu sinusoidalnego metodą liczb zespolonych wprowadza się moc pozorną zespoloną wyrażoną wzorem

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* \quad (15.1)$$

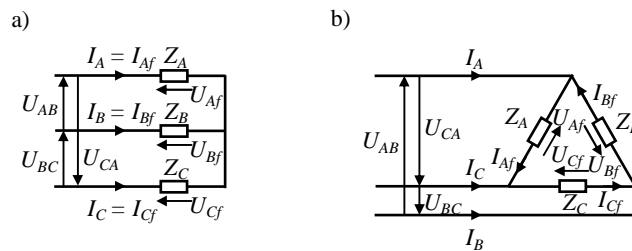
gdzie \underline{U} – zespolona wartość napięcia, \underline{I}^* – zespolona sprzężona wartość prądu. Wówczas moc czynna P oraz moc bierna Q wyrażają się wzorami

$$P = \operatorname{Re}(\underline{S}) \quad (15.2)$$

$$Q = \operatorname{Im}(\underline{S}) \quad (15.3)$$

14.2. Moc odbiornika trójfazowego

Moc odbiornika trójfazowego symetrycznego, to znaczy w którym spełniony jest warunek $\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C$, rys. 15.1 oraz rys. 15.2



Rys. 15.1a) Odbiornik trójfazowy połączony w gwiazdę, układ trójprzewodowy, b) odbiornik trójfazowy połączony w trójkąt

ogólnie równa się potrójnej mocy odbiornika wytwarzanej w jednej fazie

$$P = 3P_A = 3U_{Af} I_{Af} \cos(\varphi_A) \quad (15.4)$$

$$Q = 3Q_A = 3U_{Af} I_{Af} \sin(\varphi_A) \quad (15.5)$$

$$S = 3S_A = 3U_{Af}I_{Af} \quad (15.6)$$

Korzystając z zależności łączących napięcie i prąd przewodowy i fazowy dla układów odbiornika połączonych w gwiazdę i trójkąt, wzory (15.7,15.8)

$$U_{AB} = \sqrt{3}U_A \quad (15.7)$$

$$I_A = \sqrt{3}I_{Af} \quad (15.8)$$

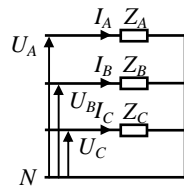
otrzymujemy wzory na moce wyrażone tylko przez wielkości przewodowe

$$P = \sqrt{3}U_{AB}I_A \cos(\varphi_A) \quad (15.9)$$

$$Q = \sqrt{3}U_{AB}I_A \sin(\varphi_A) \quad (15.10)$$

$$S = \sqrt{3}U_{AB}I_A \quad (15.11)$$

Na rys. 15.2 przedstawiono odbiornik trójfazowy połączony w gwiazdę w układzie czteroprzewodowym z przewodem neutralnym.



Rys. 15.2. Odbiornik trójfazowy połączony w gwiazdę w układzie czteroprzewodowym

Ponieważ w układzie odbiornika trójfazowego połączonego w gwiazdę w układzie czteroprzewodowym wielkości napięcia i prądu przewodowego i fazowego są sobie równe, moc odbiornika symetrycznego wyraża się wzorem

$$P = 3U_A I_A \cos(\varphi_A) \quad (15.12)$$

$$Q = 3U_A I_A \sin(\varphi_A) \quad (15.13)$$

$$S = 3U_{AB} I_A \quad (15.14)$$

W przypadku odbiornika trójfazowego niesymetrycznego, to znaczy w którym spełniony jest warunek $\underline{Z}_A \neq \underline{Z}_B \neq \underline{Z}_C$, moc odbiornika oblicza się sumując moce na poszczególnych fazach

$$P = U_{Af} I_{Af} \cos(\varphi_A) + U_{Bf} I_{Bf} \cos(\varphi_B) + U_{Cf} I_{Cf} \cos(\varphi_C) \quad (14.15)$$

$$Q = U_{Af} I_{Af} \sin(\varphi_A) + U_{Bf} I_{Bf} \sin(\varphi_B) + U_{Cf} I_{Cf} \sin(\varphi_C) \quad (14.16)$$

$$S = U_{Af} I_{Af} + U_{Bf} I_{Bf} + U_{Cf} I_{Cf} \quad (14.17)$$

16. OBWODY TRÓJFAZOWE GENERATOR – ODBIORNIK

W rozdziale przedstawiono typowe układy spotykane w praktyce. Założono, że odbiornik ma charakter rezystancyjno – indukcyjno – pojemnościowy, gdzie rozpatruje się impedancję \underline{Z} odbiornika. Pojęcie impedancji wyjaśniono w rozdziale 13.

16.1. Układ gwiazda – gwiazda

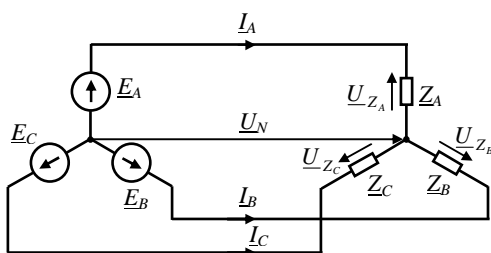
Rozpatrzmy układ trójfazowy trójprzewodowy gwiazda – gwiazda rys. 16.1, w którym wiadome są chwilowe symetryczne siły elektromotoryczne źródeł

$$e_A = E_{Am} \sin(\omega t + \varphi_e) \quad (16.1)$$

$$e_B = E_{Bm} \sin\left(\omega t + \varphi_e - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (16.2)$$

$$e_C = E_{Cm} \sin\left(\omega t + \varphi_e - \frac{4\pi}{3}\right) \quad (16.3)$$

gdzie $E_{Am, Bm, Cm} = \sqrt{2} E_{A, B, C}$, $E_A = E_B = E_C$ – wartości skuteczne napięć e_A , e_B , e_C , (przebiegi czasowe (16.1, 16.2, 16.3) przedstawiamy później w postaci zespolonej, wzory następne (16.4, 16.5, 16.6)) oraz wiadome są impedancje odbiornika \underline{Z}_A , \underline{Z}_B , \underline{Z}_C . Szukane są prądy przewodowe i zarazem fazowe \underline{I}_A , \underline{I}_B , \underline{I}_C , spadki napięcia na odbiorniku \underline{U}_{Z_A} , \underline{U}_{Z_B} , \underline{U}_{Z_C} oraz napięcie niesymetrii \underline{U}_N .



Rys. 16.1. Układ trójfazowy gwiazda – gwiazda

Przypadek 1. Zakładamy, że odbiornik jest symetryczny, czyli $\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C$

Dla uproszczenia wprowadzamy metodę liczb zespolonych. Przedstawiamy przebiegi czasowe napięcia e_A , e_B , e_C (16.1, 16.2, 16.3) oraz impedancje odbiornika \underline{Z}_A , \underline{Z}_B , \underline{Z}_C w postaci zespolonej

$$\underline{E}_A = E_A e^{j\varphi_e} \quad (16.4)$$

$$\underline{E}_B = E_B e^{j\left(\varphi_e - \frac{2\pi}{3}\right)} \quad (16.5)$$

$$\underline{E}_C = E_C e^{j\left(\varphi_e - \frac{4\pi}{3}\right)} \quad (16.6)$$

$$\underline{Z}_m = Z_m e^{j\varphi_m} \quad (16.7)$$

$$Z_m = \sqrt{R_m^2 + (X_{Lm} - X_{Cm})^2} \quad (16.8)$$

$$\varphi_m = \begin{cases} \arccos\left(\frac{R_m}{Z_m}\right) & \text{dla } X_{Lm} > X_{Cm} \\ -\arccos\left(\frac{R_m}{Z_m}\right) & \text{dla } X_{Lm} < X_{Cm} \end{cases} \quad (16.9)$$

gdzie $m = A, B, C$.

Przy odbiorniku symetrycznym potencjały neutralne generatora i odbiornika są równe, czyli napięcie niesymetrii $\underline{U}_N = 0$.

Wówczas prądy przewodowe i zarazem fazowe wyrażają się wzorami

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{E}_A}{\underline{Z}_A} \quad (16.10)$$

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{E}_B}{\underline{Z}_B} \quad (16.11)$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{E}_C}{\underline{Z}_C} \quad (16.12)$$

Spadki napięcia \underline{U}_{Z_A} , \underline{U}_{Z_B} , \underline{U}_{Z_C} na impedancji odbiornika \underline{Z}_A , \underline{Z}_B , \underline{Z}_C równe są napięciom generatora

$$\underline{U}_{Z_A} = \underline{Z}_A \underline{I}_A = \underline{E}_A \quad (16.13)$$

$$\underline{U}_{Z_B} = \underline{Z}_B \underline{I}_B = \underline{E}_B \quad (16.14)$$

$$\underline{U}_{Z_C} = \underline{Z}_C \underline{I}_C = \underline{E}_C \quad (16.15)$$

Przesunięcia fazowe przebiegów zapisanych w postaci zespolonej wyznaczymy według wzoru

$$\varphi = \begin{cases} \arctg\left(\frac{\text{Im}(\underline{X})}{\text{Re}(\underline{X})}\right) & \text{dla } \text{Re}(\underline{X}) > 0, \text{Im}(\underline{X}) > 0 \\ -\arctg\left(\frac{\text{Im}(\underline{X})}{\text{Re}(\underline{X})}\right) & \text{dla } \text{Re}(\underline{X}) > 0, \text{Im}(\underline{X}) < 0 \\ \pi - \arctg\left(-\frac{\text{Im}(\underline{X})}{\text{Re}(\underline{X})}\right) & \text{dla } \text{Re}(\underline{X}) < 0, \text{Im}(\underline{X}) > 0 \end{cases} \quad (16.16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{Im}(\underline{X})}{\operatorname{Re}(\underline{X})}\right) \quad \text{dla } \operatorname{Re}(\underline{X}) < 0, \operatorname{Im}(\underline{X}) < 0 \\ \frac{\pi}{2} \quad \text{dla } \operatorname{Re}(\underline{X}) = 0, \operatorname{Im}(\underline{X}) > 0 \\ -\frac{\pi}{2} \quad \text{dla } \operatorname{Re}(\underline{X}) = 0, \operatorname{Im}(\underline{X}) < 0 \\ 0 \quad \text{dla } \operatorname{Re}(\underline{X}) > 0, \operatorname{Im}(\underline{X}) = 0 \\ \pi \quad \text{dla } \operatorname{Re}(\underline{X}) < 0, \operatorname{Im}(\underline{X}) = 0 \end{array} \right.$$

gdzie \underline{X} - przebieg czasowy zapisany w postaci zespolonej.

Przesunięcia fazowe pomiędzy przebiegami wyznaczmy obliczając różnicę przesunięć fazowych. Na przykład przesunięcie fazowe pomiędzy przebiegami napięć generatora e_A, e_B, e_C a prądami przewodowym i zarazem fazowymi obwodu i_A, i_B, i_C wynosi

$$\varphi_{e_A, i_A} = \varphi_{e_A} - \varphi_{i_A} \quad (16.17)$$

$$\varphi_{e_B, i_B} = \varphi_{e_B} - \varphi_{i_B} \quad (16.18)$$

$$\varphi_{e_C, i_C} = \varphi_{e_C} - \varphi_{i_C} \quad (16.19)$$

Uwaga !

Jeżeli odbiornik jest symetryczny i zachodzi potrzeba wyznaczenia w układzie tylko wartości skutecznych napięcia i prądu, można skorzystać z następujących wzorów

$$I_A = \frac{E_A}{Z_A} \quad (16.20)$$

$$U_{Z_A} = E_A \quad (16.21)$$

Przesunięcie fazowe pomiędzy przebiegiem napięcia na odbiorniku u_{Z_A} a przebiegiem prądu przepływającego przez odbiornik i_A można wyznaczyć z trójkąta impedancji odbiornika, tzn.

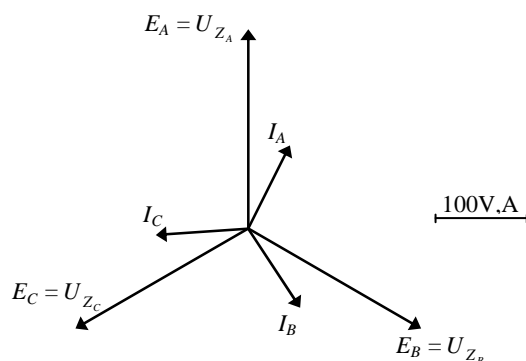
$$\varphi_{u_{Z_A}, i_A} = \begin{cases} \arccos\left(\frac{R_A}{Z_A}\right) \quad \text{dla } X_{L,A} > X_{C,A} \\ -\arccos\left(\frac{R_A}{Z_A}\right) \quad \text{dla } X_{L,A} < X_{C,A} \end{cases} \quad (16.22)$$

Wartości skuteczne napięcia i prądu oraz przesunięcia fazowego we wszystkich fazach, dla układu symetrycznego, są równe.

Przykład

Na rys. 16.2 przedstawiono wykres wskazowy dla wartości skutecznych

symetrycznego układu gwiazda – gwiazda dla $E_A = E_B = E_C = 220 \text{ V}$, $\varphi_e = 90^\circ$, $\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = R + jX$, $R = 2 \Omega$, $X = 1 \Omega$, czyli odbiornik symetryczny o charakterze rezystancyjno – indukcyjnym.



Rys. 16.2. Wykres wskazowy układu symetrycznego gwiazda – gwiazda dla wartości skutecznych

Po obliczeniach obwodu uzyskano następujące wyniki, wartości skuteczne prądów przewodowych i zarazem fazowych $I_A = I_B = I_C = 98,3 \text{ A}$, przesunięcia fazowe wektorów prądu $\varphi_{I_A} = 63,4^\circ$, $\varphi_{I_B} = -56,5^\circ$, $\varphi_{I_C} = -176,5^\circ$, przesunięcia fazowe pomiędzy wektorami napięć generatora E_A, E_B, E_C a wektorami prądu I_A, I_B, I_C wynoszą $\varphi_{E_A, I_A} = \varphi_{E_B, I_B} = \varphi_{E_C, I_C} = 26,5^\circ$. Przesunięcia fazowe wektorów odpowiadają przesunięciom fazowym odpowiednich przebiegów czasowych.

Przypadek 2. Zakładamy, że odbiornik jest niesymetryczny, czyli $\underline{Z}_A \neq \underline{Z}_B \neq \underline{Z}_C$

Podobnie jak w przypadku 1 wprowadzamy metodę liczb zespolonych i przedstawiamy przebiegi napięcia generatora e_A, e_B, e_C , wzory (16.1, 16.2, 16.3) oraz impedancje odbiornika w postaci zespolonej, tzn. $\underline{E}_A, \underline{E}_B, \underline{E}_C$ wzory (16.4, 16.5, 16.6) oraz $\underline{Z}_A, \underline{Z}_B, \underline{Z}_C$ wzory (16.7, 16.8, 16.9).

Przy odbiorniku niesymetrycznym, potencjały neutralne generatora i odbiornika są różne, czyli występuje napięcie niesymetrii \underline{U}_N

$$\underline{U}_N = \frac{\frac{1}{\underline{Z}_A} \underline{E}_A + \frac{1}{\underline{Z}_B} \underline{E}_B + \frac{1}{\underline{Z}_C} \underline{E}_C}{\frac{1}{\underline{Z}_A} + \frac{1}{\underline{Z}_B} + \frac{1}{\underline{Z}_C}} \quad (16.23)$$

Wówczas prądy przewodowe i zarazem fazowe $\underline{I}_A, \underline{I}_B, \underline{I}_C$ wyrażają się wzorami

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{E}_A - \underline{U}_N}{\underline{Z}_A} \quad (16.24)$$

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{E}_B - \underline{U}_N}{\underline{Z}_B} \quad (16.25)$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{E}_C - \underline{U}_N}{\underline{Z}_C} \quad (16.26)$$

Spadki napięcia na impedancji odbiornika $\underline{Z}_A, \underline{Z}_B, \underline{Z}_C$ wynoszą

$$\underline{U}_{Z_A} = \underline{Z}_A \underline{I}_A \quad (16.27)$$

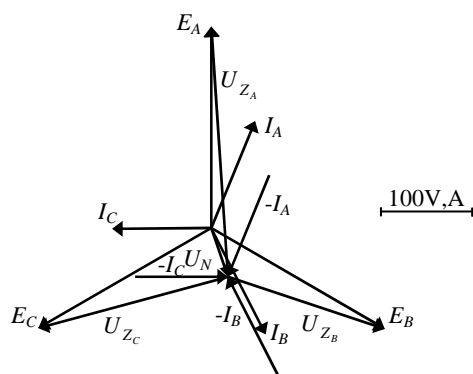
$$\underline{U}_{Z_B} = \underline{Z}_B \underline{I}_B \quad (16.28)$$

$$\underline{U}_{Z_C} = \underline{Z}_C \underline{I}_C \quad (16.29)$$

Przesunięcia fazowe przebiegów zapisanych w postaci zespolonej wyznaczmy według wzoru (16.16), natomiast przesunięcia fazowe pomiędzy przebiegami wyznaczmy obliczając różnicę przesunięć fazowych, na przykład wzory (16.17, 16.18, 16.19).

Przykład

Na rys. 16.3 przedstawiono wykres wskazowy wartości skutecznych układu niesymetrycznego układu gwiazda – gwiazda dla $E_A = E_B = E_C = 220 \text{ V}$, $\varphi_e = 90^\circ$, $\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = R + jX$, $R_A = 2 \Omega$, $R_B = 1 \Omega$, $R_C = 2 \Omega$, $X_A = 1 \Omega$, $X_B = 1 \Omega$, $X_C = 0,5 \Omega$, czyli odbiornik niesymetryczny o charakterze rezystancyjno – indukcyjnym.



Rys. 16.3. Wykres wskazowy układu niesymetrycznego gwiazda – gwiazda dla wartości skutecznych

Po obliczeniach obwodu uzyskano następujące wyniki, wartości skuteczne prądów przewodowych i zarazem fazowych $I_A = 123,3 \text{ A}$, $I_B = 126,9 \text{ A}$, $I_C = 105,3 \text{ A}$, przesunięcia fazowe wektora prądu $\varphi_{I_A} = 63,4^\circ$, $\varphi_{I_B} = -56,5^\circ$, $\varphi_{I_C} = -176,5^\circ$, wartości skuteczne spadku napięcia na odbiorniku $U_{Z_A} = 275,8 \text{ V}$, $U_{Z_B} = 179,5 \text{ V}$, $U_{Z_C} = 217,1 \text{ V}$, przesunięcia fazowe wektora napięć na odbiorniku $\varphi_{U_{Z_A}} = 94^\circ$, $\varphi_{U_{Z_B}} = -17,7^\circ$, $\varphi_{U_{Z_C}} = -165,3^\circ$, wartość skuteczna napięcia niesymetrii $U_N = 58 \text{ V}$ i przesunięcie fazowe $\varphi_{U_N} = -70,5^\circ$ oraz przesunięcie fazowe pomiędzy wektorami napięć generatora E_A, E_B, E_C a wektorami prądów I_A, I_B, I_C $\varphi_{E_A, I_A} = 22,5^\circ$, $\varphi_{E_B, I_B} = 32,7^\circ$, $\varphi_{E_C, I_C} = 29,4^\circ$. Przesunięcia fazowe wektorów odpowiadają przesunięciom fazowym odpowiednich przebiegów czasowych.

16.2. Układ gwiazda – gwiazda zwarty przewodem neutralnym

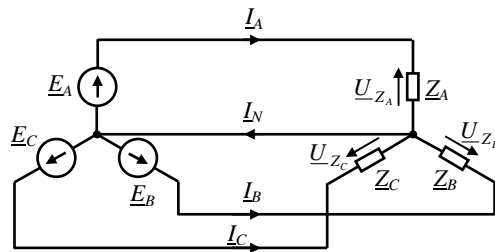
Rozpatrzmy układ trójfazowy gwiazda – gwiazda zwarty przewodem neutralnym rys. 16.4, w którym wiadome są chwilowe symetryczne siły elektromotoryczne źródeł

$$e_A = E_{Am} \sin(\omega t + \varphi_e) \quad (16.30)$$

$$e_B = E_{Bm} \sin\left(\omega t + \varphi_e - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (16.31)$$

$$e_C = E_{Cm} \sin\left(\omega t + \varphi_e - \frac{4\pi}{3}\right) \quad (16.32)$$

gdzie $E_{Am, Bm, Cm} = \sqrt{2} E_{A, B, C}$, $E_A = E_B = E_C$ – wartości skuteczne napięć e_A , e_B , e_C , (przebiegi czasowe (16.30, 16.31, 16.32) przedstawiamy później w postaci zespolonej) oraz wiadome są impedancje odbiornika Z_A , Z_B , Z_C . Szukane są prądy przewodowe i zarazem fazowe I_A , I_B , I_C , prąd w przewodzie neutralnym I_N , oraz spadki napięcia na odbiorniku U_{Z_A} , U_{Z_B} , U_{Z_C} .



Rys. 16.4. Układ trójfazowy gwiazda – gwiazda zwarty przewodem neutralnym

Przypadek 1. Zakładamy, że odbiornik jest symetryczny, czyli $Z_A = Z_B = Z_C$

W przypadku odbiornika symetrycznego postępujemy podobnie jak w przypadku układu gwiazda – gwiazda bez przewodu neutralnego, punkt 16.1 przypadek 1. Wówczas przewód neutralny nic nie wnosi ponieważ samoistnie potencjał neutralny generatora równy jest potencjałowi neutralnemu odbiornika. Prąd w przewodzie neutralnym nie płynie, czyli $I_N = 0$.

Przypadek 2. Zakładamy, że odbiornik jest niesymetryczny, czyli $Z_A \neq Z_B \neq Z_C$

Podobnie jak w punkcie 16.1 przypadek 1 wprowadzamy metodę liczb zespolonych i przedstawiamy przebiegi napięcia generatora e_A , e_B , e_C (16.30, 16.31, 16.32) oraz impedancje odbiornika w postaci zespolonej, tzn. E_A , E_B , E_C , Z_A , Z_B , Z_C , patrz punkt 16.1 wzory (16.4, 16.5, 16.6, 16.7, 16.8, 16.9).

Prądy przewodowe i zarazem fazowe I_A , I_B , I_C wyznaczamy ze wzorów

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{E}_A}{\underline{Z}_A} \quad (16.33)$$

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{E}_B}{\underline{Z}_B} \quad (16.34)$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{E}_C}{\underline{Z}_C} \quad (16.35)$$

Prąd w przewodzie neutralnym \underline{I}_N wyznaczamy według wzoru

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C \quad (16.36)$$

Spadki napięcia \underline{U}_{Z_A} , \underline{U}_{Z_B} , \underline{U}_{Z_C} na impedancji odbiornika \underline{Z}_A , \underline{Z}_B , \underline{Z}_C równe są napięciom generatora

$$\underline{U}_{Z_A} = \underline{Z}_A \underline{I}_A = \underline{E}_A \quad (16.37)$$

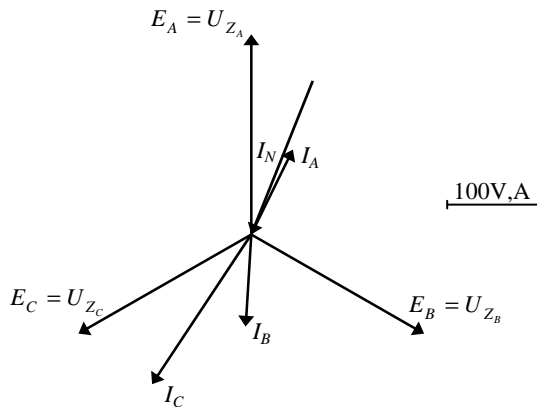
$$\underline{U}_{Z_B} = \underline{Z}_B \underline{I}_B = \underline{E}_B \quad (16.38)$$

$$\underline{U}_{Z_C} = \underline{Z}_C \underline{I}_C = \underline{E}_C \quad (16.39)$$

Przesunięcia fazowe przebiegów zapisanych w postaci zespolonej wyznaczmy według wzoru (16.16), natomiast przesunięcia fazowe pomiędzy przebiegami wyznaczmy obliczając różnicę przesunięć fazowych, na przykład wzory (16.17, 16.18, 16.19).

Przykład

Na rys. 16.5 przedstawiono wykres wskazowy wartości skutecznych niesymetrycznego układu gwiazda – gwiazda zwartego przewodem neutralnym dla $E_A = E_B = E_C = 220 \text{ V}$, $\varphi_e = 90^\circ$, $\underline{Z}_{A,B,C} = R_{A,B,C} + jX_{A,B,C}$, $R_A = 2 \Omega$, $R_B = 1 \Omega$, $R_C = 1 \Omega$, $X_A = 1 \Omega$, $X_B = 2 \Omega$, $X_C = -0,5 \Omega$, czyli odbiornik niesymetryczny o charakterze rezystancyjno – indukcyjno – pojemnościowym.



Rys. 16.5. Wykres wskazowy układu niesymetrycznego gwiazda – gwiazda zwarty przewodem neutralnym dla wartości skutecznych

Po obliczeniach obwodu uzyskano następujące wyniki, wartości skuteczne prądów przewodowych i zarazem fazowych $I_A = 98,3 \text{ A}$, $I_B = 98,3 \text{ A}$, $I_C = 196,7 \text{ A}$, przesunięcia fazowe wektora prądu $\varphi_{I_A} = 63,4^\circ$, $\varphi_{I_B} = -93,4^\circ$, $\varphi_{I_C} = -123,4^\circ$, wartość skuteczna prądu w przewodzie neutralnym $I_N = 188 \text{ A}$, przesunięcie fazowe wektora prądu w przewodzie neutralnym $\varphi_{I_N} = -111,9^\circ$, przesunięcia fazowe pomiędzy wektorami napięć generatora E_A, E_B, E_C a wektorami prądu I_A, I_B, I_C wynoszą $\varphi_{E_A, I_A} = 26,5^\circ$, $\varphi_{E_B, I_B} = 63,4^\circ$, $\varphi_{E_C, I_C} = -26,5^\circ$. Przesunięcia fazowe wektorów odpowiadają przesunięciom fazowym odpowiednich przebiegów czasowych.

16.3. Układ gwiazda – gwiazda z impedancją w przewodzie neutralnym

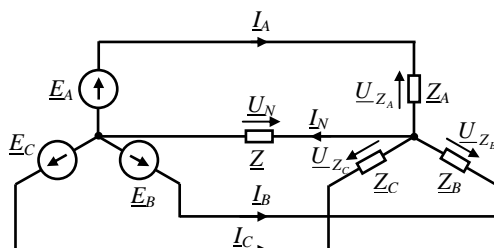
Rozpatrzmy układ trójfazowy gwiazda – gwiazda z impedancją w przewodzie neutralnym rys. 16.6, w którym wiadome są chwilowe symetryczne siły elektromotoryczne źródeł

$$e_A = E_{Am} \sin(\omega t + \varphi_e) \quad (16.40)$$

$$e_B = E_{Bm} \sin\left(\omega t + \varphi_e - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (16.41)$$

$$e_C = E_{Cm} \sin\left(\omega t + \varphi_e - \frac{4\pi}{3}\right) \quad (16.42)$$

gdzie $E_{Am, Bm, Cm} = \sqrt{2} E_{A, B, C}$, $E_A = E_B = E_C$ – wartości skuteczne napięć e_A, e_B, e_C , (przebiegi czasowe (16.40, 16.41, 16.42) przedstawiamy później w postaci zespolonej) oraz wiadome są impedancje odbiornika $\underline{Z}_A, \underline{Z}_B, \underline{Z}_C$ i impedancja w przewodzie neutralnym \underline{Z}_N . Szukane są prądy przewodowe i zarazem fazowe $\underline{I}_A, \underline{I}_B, \underline{I}_C$, spadki napięcia na odbiorniku $\underline{U}_{Z_A}, \underline{U}_{Z_B}, \underline{U}_{Z_C}$ oraz prąd w przewodzie neutralnym \underline{I}_N oraz napięcie niesymetrii \underline{U}_N .



Rys. 16.6. Układ trójfazowy gwiazda – gwiazda z impedancją w przewodzie neutralnym

Przypadek 1. Zakładamy, że odbiornik jest symetryczny, czyli $\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C$

W przypadku odbiornika symetrycznego postępujemy podobnie jak w przypadku

układu gwiazda – gwiazda bez przewodu neutralnego, punkt 16.1 przypadek 1. Wówczas impedancja w przewodzie neutralnym nic nie wnosi ponieważ samoistnie potencjał neutralny generatora równy jest potencjałowi neutralnemu odbiornika, czyli $\underline{U}_N = 0$. Prąd w przewodzie neutralnym nie płynie, $\underline{I}_N = 0$.

Przypadek 2. Zakładamy, że odbiornik jest niesymetryczny, czyli $\underline{Z}_A \neq \underline{Z}_B \neq \underline{Z}_C$

Podobnie jak w punkcie 16.1 przypadek 1 wprowadzamy metodę liczb zespolonych i przedstawiamy przebiegi napięcia generatora e_A, e_B, e_C (16.40, 16.41, 16.42), impedancje odbiornika oraz impedancje w przewodzie neutralnym w postaci zespolonej, tzn. $\underline{E}_A, \underline{E}_B, \underline{E}_C, \underline{Z}_A, \underline{Z}_B, \underline{Z}_C, \underline{Z}_N$, patrz punkt 16.1 wzory (16.4, 16.5, 16.6, 16.7, 16.8, 16.9).

Przy odbiorniku niesymetrycznym, potencjały neutralne generatora i odbiornika są różne, czyli występuje napięcie niesymetrii \underline{U}_N

$$\underline{U}_N = \frac{\frac{1}{\underline{Z}_A} \underline{E}_A + \frac{1}{\underline{Z}_B} \underline{E}_B + \frac{1}{\underline{Z}_C} \underline{E}_C}{\frac{1}{\underline{Z}_A} + \frac{1}{\underline{Z}_B} + \frac{1}{\underline{Z}_C} + \frac{1}{\underline{Z}_N}} \quad (16.43)$$

Wówczas prądy przewodowe i zarazem fazowe $\underline{I}_A, \underline{I}_B, \underline{I}_C$ wyrażają się wzorami

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{E}_A - \underline{U}_N}{\underline{Z}_A} \quad (16.44)$$

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{E}_B - \underline{U}_N}{\underline{Z}_B} \quad (16.45)$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{E}_C - \underline{U}_N}{\underline{Z}_C} \quad (16.46)$$

Spadki napięcia na impedancji odbiornika $\underline{Z}_A, \underline{Z}_B, \underline{Z}_C$ wynoszą

$$\underline{U}_{Z_A} = \underline{Z}_A \underline{I}_A \quad (16.47)$$

$$\underline{U}_{Z_B} = \underline{Z}_B \underline{I}_B \quad (16.48)$$

$$\underline{U}_{Z_C} = \underline{Z}_C \underline{I}_C \quad (16.49)$$

Prąd w przewodzie neutralnym \underline{I}_N wyznacza się ze wzoru

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C \quad (16.50)$$

lub

$$\underline{I}_N = \frac{\underline{U}_N}{\underline{Z}_N} \quad (16.51)$$