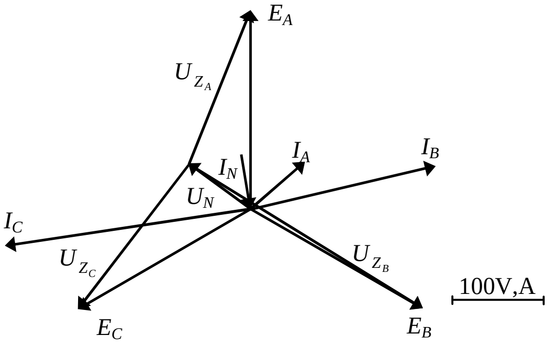
Przesunięcia fazowe przebiegów zapisanych w postaci zespolonej wyznaczymy według wzoru (16.16), natomiast przesunięcia fazowe pomiędzy przebiegami wyznaczymy obliczając różnicę przesunięć fazowych, na przykład wzory (16.17, 16.18, 16.19).

Przykład

Na rys. 16.7 przedstawiono wykres wskazowy wartości skutecznych niesymetrycznego układu gwiazda – gwiazda z impedancją w przewodzie neutralnym dla $E_A = E_B = E_C = 220$ V, $\varphi_e = 90°$, $\underline{Z}_{A,B,C,N} = R_{A,B,C,N} + \mathrm{j}X_{A,B,C,N}$, $R_A = 2\ \Omega$, $R_B = 1\ \Omega$, $R_C = 0{,}5\ \Omega$, $X_A = 1\ \Omega$, $X_B = -1\ \Omega$, $X_C = 0{,}5\ \Omega$, $R_N = 1\ \Omega$, $X_N = 1\ \Omega$, czyli odbiornik niesymetryczny o charakterze rezystancyjno – indukcyjno – pojemnościowym.



Rys. 16.7. Wykres wskazowy niesymetrycznego układu gwiazda – gwiazda z impedancją w przewodzie neutralnym dla wartości skutecznych

Po obliczeniach obwodu uzyskano następujące wyniki, wartości skuteczne prądów fazowych i zarazem przewodowych $I_A = 81{,}4$ A, $I_B = 217$ A, $I_C = 285{,}2$ A, przesunięcia fazowe wektora prądu $\varphi_{I_A} = 40{,}7°$, $\varphi_{I_B} = 13{,}1°$, $\varphi_{I_C} = -171{,}6°$, wartość skuteczna prądu w przewodzie neutralnym $I_N = 61{,}7$ A oraz przesunięcie fazowe $\varphi_{I_N} = 98{,}5°$, wartości skuteczne spadku napięcia na odbiorniku $U_{Z_A} = 182{,}1$ V, $U_{Z_B} = 306{,}9$ V, $U_{Z_C} = 201{,}6$ V, przesunięcia fazowe wektora napięć na odbiorniku $\varphi_{U_{Z_A}} = 67{,}3°$, $\varphi_{U_{Z_B}} = -31{,}8°$, $\varphi_{U_{Z_C}} = -126{,}6°$, wartość skuteczna napięcia niesymetrii $U_N = 87{,}3$ V i przesunięcie fazowe $\varphi_{U_N} = 143{,}5°$ oraz przesunięcie fazowe pomiędzy wektorami napięć generatora E_A, E_B, E_C a wektorem prądów I_A, I_B, I_C $\varphi_{E_A,I_A} = 49{,}2°$, $\varphi_{E_B,I_B} = -43{,}1°$, $\varphi_{E_C,I_C} = 21{,}6°$. Przesunięcia fazowe wektorów odpowiadają przesunięciom fazowym odpowiednich przebiegów czasowych.

16.4. Układ trójkąt – gwiazda

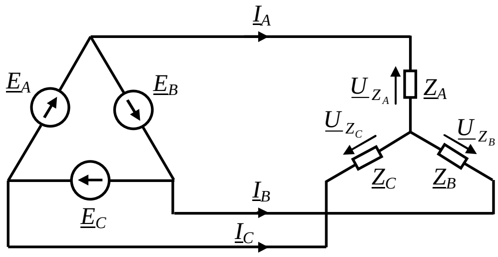
Rozpatrzmy układ trójfazowy trójkąt – gwiazda rys. 16.8, w którym wiadome są chwilowe symetryczne siły elektromotoryczne źródeł

$$e_A = E_{Am} \sin(\omega t + \varphi_e) \tag{16.52}$$

$$e_B = E_{Bm} \sin\left(\omega t + \varphi_e - \frac{2\pi}{3}\right) \tag{16.53}$$

$$e_C = E_{Cm} \sin\left(\omega t + \varphi_e - \frac{4\pi}{3}\right) \tag{16.54}$$

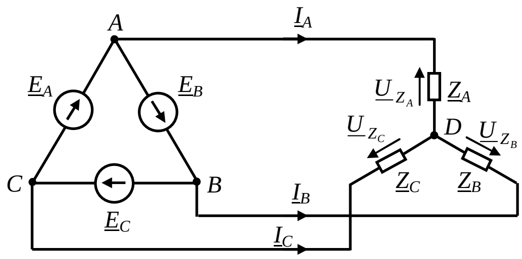
gdzie $E_{Am,Bm,Cm} = \sqrt{2}\, E_{A,B,C}$, $E_A = E_B = E_C$ – wartości skuteczne napięć e_A, e_B, e_C, (przebiegi czasowe (16.52, 16.53, 16.54) przedstawiamy później w postaci zespolonej) oraz wiadome są impedancje odbiornika $\underline{Z}_A$, $\underline{Z}_B$, $\underline{Z}_C$. Szukane są prądy przewodowe i zarazem fazowe $\underline{I}_A$, $\underline{I}_B$, $\underline{I}_C$ oraz spadki napięcia na odbiorniku $\underline{U}_{Z_A}$, $\underline{U}_{Z_B}$, $\underline{U}_{Z_C}$.



Rys. 16.8. Układ trójfazowy trójkąt – – gwiazda

Zakładamy, że odbiornik jest dowolny tzn. symetryczny lub niesymetryczny, wyznaczamy wykres wskazowy lub wartości chwilowe i skuteczne napięcia i prądu w układzie.

Podobnie jak w punkcie 16.1 przypadek 1 wprowadzamy metodę liczb zespolonych i przedstawiamy przebiegi napięcia e_A, e_B, e_C (16.52, 16.53, 16.54) oraz impedancje odbiornika w postaci zespolonej, tzn. $\underline{E}_A$, $\underline{E}_B$, $\underline{E}_C$, $\underline{Z}_A$, $\underline{Z}_B$, $\underline{Z}_C$, patrz punkt 16.1 wzory (16.4, 16.5, 16.6, 16.7, 16.8, 16.9).
Układ trójfazowy trójkąt – gwiazda rozwiązujemy metodą potencjałów węzłowych, rys. 16.9.



Rys. 16.9. Układ trójfazowy trójkąt – gwiazda rozwiązywany metodą potencjałów węzłowych

Dla węzła *D* możemy napisać równanie prądu z I prawa Kirchhoffa

$$\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0 \tag{16.55}$$

przy czym

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{V}_A - \underline{V}_D}{\underline{Z}_A} \tag{16.56}$$

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{V}_B - \underline{V}_D}{\underline{Z}_B} \tag{16.57}$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{V}_C - \underline{V}_D}{\underline{Z}_C} \tag{16.58}$$

Podstawiając równania (16.56, 16.57, 16.58) do (16.55) otrzymujemy

$$\underline{V}_D = \frac{\frac{1}{\underline{Z}_A}\underline{V}_A + \frac{1}{\underline{Z}_B}\underline{V}_B + \frac{1}{\underline{Z}_C}\underline{V}_C}{\frac{1}{\underline{Z}_A} + \frac{1}{\underline{Z}_B} + \frac{1}{\underline{Z}_C}} \tag{16.59}$$

przy czym $\underline{V}_A = \underline{E}_A$, $\underline{V}_B = \underline{E}_A + \underline{E}_B$, $\underline{V}_C = 0$.
Po rozwiązaniu równania (16.59) oraz równań (16.56, 16.57, 16.58) otrzymujemy prądy przewodowe i zarazem fazowe $\underline{I}_A$, $\underline{I}_B$, $\underline{I}_C$.
Spadki napięcia na impedancjach odbiornika $\underline{Z}_A$, $\underline{Z}_B$, $\underline{Z}_C$ wyrażają się wzorami

$$\underline{U}_{Z_A} = \underline{Z}_A \underline{I}_A \tag{16.60}$$

$$\underline{U}_{Z_B} = \underline{Z}_B \underline{I}_B \tag{16.61}$$

$$\underline{U}_{Z_C} = \underline{Z}_C \underline{I}_C \tag{16.62}$$

Przesunięcia fazowe przebiegów zapisanych w postaci zespolonej wyznaczymy według wzoru (16.16), natomiast przesunięcia fazowe pomiędzy przebiegami wyznaczymy obliczając różnicę przesunięć fazowych, na przykład wzory (16.17, 16.18, 16.19).

Uwaga !

Jeżeli odbiornik jest symetryczny i zachodzi potrzeba wyznaczenia tylko wartości skutecznych napięcia i prądu w układzie można skorzystać z następujących wzorów

$$U_{Z_A} = \frac{E_A}{\sqrt{3}} \tag{16.63}$$

$$I_A = \frac{U_{ZA}}{Z_A} \tag{16.64}$$

Napięcie fazowe na odbiorniku połączonym w gwiazdę jest o $\sqrt{3}$ razy mniejsze od napięcia przewodowego, wynika to z zależności trygonometrycznych wykresu

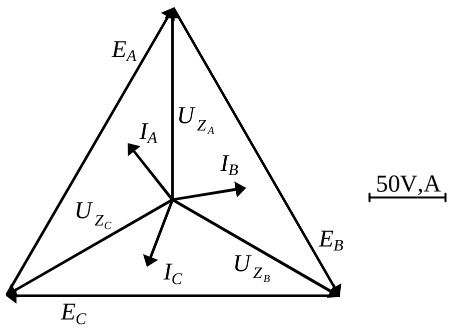
wskazowego dla układu symetrycznego, np. wykres wskazowy rys. 16.10.
Przesunięcie fazowe pomiędzy przebiegiem napięcia na odbiorniku u_{Z_A} a przebiegiem prądu przepływającego przez odbiornik i_A można wyznaczyć z trójkąta impedancji odbiornika, tzn.

$$\varphi_{u_{Z_A},i_A} = \begin{cases} \arccos\left(\dfrac{R_A}{Z_A}\right) \; dla \; X_{L,A} > X_{C,A} \\ -\arccos\left(\dfrac{R_A}{Z_A}\right) \; dla \; X_{L,A} < X_{C,A} \end{cases} \qquad (16.65)$$

Wartości skuteczne napięcia i prądu oraz przesunięcia fazowego we wszystkich fazach, dla układu symetrycznego, są równe.

Przykład 1

Na rys. 16.10 przedstawiono wykres wskazowy wartości skutecznych układu symetrycznego trójkąt – gwiazda dla $E_A = E_B = E_C = 220$ V, $\varphi_e = 60°$, $\underline{Z}_{A,B,C} = R_{A,B,C} + \mathrm{j}X_{A,B,C}$, $R = 2{,}5\ \Omega$, $X = -2\ \Omega$, czyli odbiornik symetryczny o charakterze rezystancyjno – pojemnościowym.



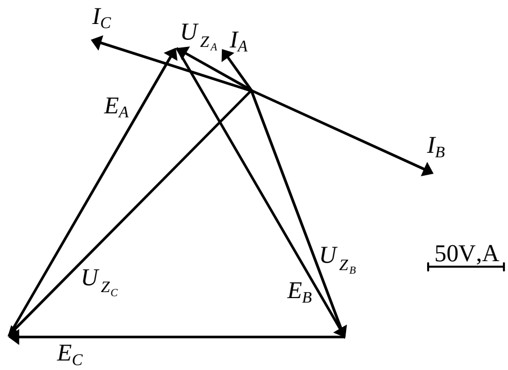
Rys. 16.10. Wykres wskazowy układu symetrycznego trójkąt – gwiazda dla wartości skutecznych

Po obliczeniach obwodu uzyskano następujące wyniki, wartości skuteczne prądów przewodowych i zarazem fazowych $I_A = I_B = I_C = 39{,}6$ A, przesunięcia fazowe wektora prądu $\varphi_{I_A} = 128{,}6°$, $\varphi_{I_B} = 8{,}6°$, $\varphi_{I_C} = -111{,}3°$, wartości skuteczne spadku napięcia na odbiorniku $U_{Z_A} = U_{Z_B} = U_{Z_C} = 127$ V, przesunięcia fazowe wektora spadku napięć na odbiorniku $\varphi_{U_{Z_A}} = 90°$, $\varphi_{U_{Z_B}} = -30°$, $\varphi_{U_{Z_C}} = -150°$ oraz przesunięcie fazowe pomiędzy wektorami napięć na odbiorniku U_{Z_A}, U_{Z_B}, U_{Z_C} a wektorem prądów I_A, I_B, I_C wynosi $\varphi_{U_{Z_A},I_A} = \varphi_{U_{Z_B},I_B} = \varphi_{U_{Z_C},I_C} = -38{,}6°$. Przesunięcia fazowe wektorów odpowiadają przesunięciom fazowym odpowiednich przebiegów czasowych.

Przykład 2

Na rys. 16.11 przedstawiono wykres wskazowy wartości skutecznych układu niesymetrycznego trójkąt – gwiazda dla $E_A = E_B = E_C = 220$ V, $\varphi_e = 60°$,

$\underline{Z}_{A,B,C} = R_{A,B,C} + \mathrm{j}X_{A,B,C}$, $R_A = 2\,\Omega$, $R_B = 1\,\Omega$, $R_C = 1\,\Omega$, $X_A = 1\,\Omega$, $X_B = -1\,\Omega$, $X_C = 2\,\Omega$, czyli odbiornik niesymetryczny o charakterze rezystancyjno – indukcyjno – pojemnościowym.



Rys. 16.11. Wykres wskazowy układu niesymetrycznego trójkąt – gwiazda dla wartości skutecznych

Po obliczeniach obwodu uzyskano następujące wyniki, wartości skuteczne prądów przewodowych i zarazem fazowych $I_A = 25{,}2$ A, $I_B = 123{,}4$ A, $I_C = 102{,}3$ A, przesunięcia fazowe wektora prądu $\varphi_{I_A} = 125{,}1°$, $\varphi_{I_B} = -24{,}8°$, $\varphi_{I_C} = 162{,}2°$, wartości skuteczne spadku napięcia na odbiorniku $U_{Z_A} = 56{,}4$ V, $U_{Z_B} = 174{,}5$ V, $U_{Z_C} = 228{,}8$ V, przesunięcia fazowe wektora napięć na odbiorniku $\varphi_{U_{Z_A}} = 151{,}7°$, $\varphi_{U_{Z_B}} = -69{,}8°$, $\varphi_{U_{Z_C}} = -134{,}2°$, oraz przesunięcie fazowe pomiędzy wektorami napięć na odbiorniku U_{Z_A}, U_{Z_B}, U_{Z_C} a wektorem prądów I_A, I_B, I_C wynosi $\varphi_{U_{Z_A},I_A} = 26{,}5°$, $\varphi_{U_{Z_B},I_B} = -45°$, $\varphi_{U_{Z_C},I_C} = 63{,}4°$. Przesunięcia fazowe wektorów odpowiadają przesunięciom fazowym odpowiednich przebiegów czasowych.

16.5. Układ trójkąt – trójkąt

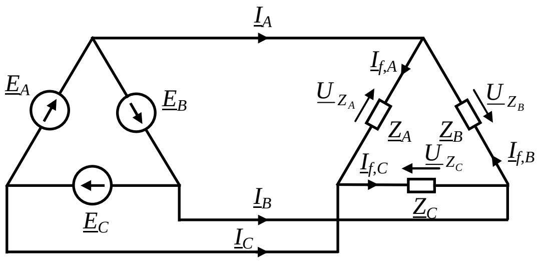
Rozpatrzmy układ trójfazowy trójkąt – trójkąt rys. 16.12, w którym wiadome są chwilowe symetryczne siły elektromotoryczne źródeł

$$e_A = E_{Am} \sin(\omega t + \varphi_e) \tag{16.66}$$

$$e_B = E_{Bm} \sin\left(\omega t + \varphi_e - \frac{2\pi}{3}\right) \tag{16.67}$$

$$e_C = E_{Cm} \sin\left(\omega t + \varphi_e - \frac{4\pi}{3}\right) \tag{16.68}$$

gdzie $E_{Am,Bm,Cm} = \sqrt{2}\, E_{A,B,C}$, $E_A = E_B = E_C$ – wartości skuteczne napięć e_A, e_B, e_C, (przebiegi czasowe (16.66, 16.67, 16.68) przedstawiamy później w postaci zespolonej) oraz wiadome są impedancje odbiornika $\underline{Z}_A$, $\underline{Z}_B$, $\underline{Z}_C$. Szukane są prądy przewodowe $\underline{I}_A$, $\underline{I}_B$, $\underline{I}_C$ oraz prądy fazowe $\underline{I}_{f,A}$, $\underline{I}_{f,B}$, $\underline{I}_{f,C}$.



Rys. 16.12. Układ trójfazowy trójkąt – trójkąt

Zakładamy, że odbiornik jest dowolny tzn. symetryczny lub niesymetryczny, wyznaczamy wykres wskazowy lub wartości chwilowe i skuteczne napięcia i prądu w układzie.

Podobnie jak w punkcie 16.1 przypadek 1 wprowadzamy metodę liczb zespolonych i przedstawiamy przebiegi napięcia e_A, e_B, e_C (16.66, 16.67, 16.68) oraz impedancje odbiornika w postaci zespolonej, tzn. $\underline{E}_A$, $\underline{E}_B$, $\underline{E}_C$, $\underline{Z}_A$, $\underline{Z}_B$, $\underline{Z}_C$, patrz punkt 16.1 wzory (16.4, 16.5, 16.6, 16.7, 16.8, 16.9).
Wówczas prądy fazowe $I_{f,A}$, $I_{f,B}$, $I_{f,C}$ wyrażają się wzorami

$$\underline{I}_{f,A} = \frac{\underline{E}_A}{\underline{Z}_A} \tag{16.69}$$

$$\underline{I}_{f,B} = \frac{\underline{E}_B}{\underline{Z}_B} \tag{16.70}$$

$$\underline{I}_{f,C} = \frac{\underline{E}_C}{\underline{Z}_C} \tag{16.71}$$

Prądy przewodowe $\underline{I}_A$, $\underline{I}_B$, $\underline{I}_C$ można określić z I prawa Kirchhoffa

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{f,A} - \underline{I}_{f,B} \tag{16.72}$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{f,B} - \underline{I}_{f,C} \tag{16.73}$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{f,C} - \underline{I}_{f,A} \tag{16.74}$$

Spadki napięcia na impedancjach odbiornika $\underline{Z}_A$, $\underline{Z}_B$, $\underline{Z}_C$ równe są napięciom generatora $\underline{E}_A$, $\underline{E}_B$, $\underline{E}_C$

$$\underline{U}_{Z_A} = \underline{E}_A \tag{16.75}$$

$$\underline{U}_{Z_B} = \underline{E}_B \tag{16.76}$$

$$\underline{U}_{Z_C} = \underline{E}_C \tag{16.77}$$

Przesunięcia fazowe przebiegów zapisanych w postaci zespolonej wyznaczymy według wzoru (16.16), natomiast przesunięcia fazowe pomiędzy przebiegami wyznaczymy obliczając różnicę przesunięć fazowych, na przykład wzory (16.17, 16.18, 16.19).

Uwaga !

Jeżeli odbiornik jest symetryczny i zachodzi potrzeba wyznaczenia tylko wartości skutecznych napięcia i prądu w układzie można skorzystać z następujących wzorów

$$I_{f,A} = \frac{E_A}{Z_A} \tag{16.78}$$

$$I_A = \sqrt{3} I_{f,A} \tag{16.79}$$

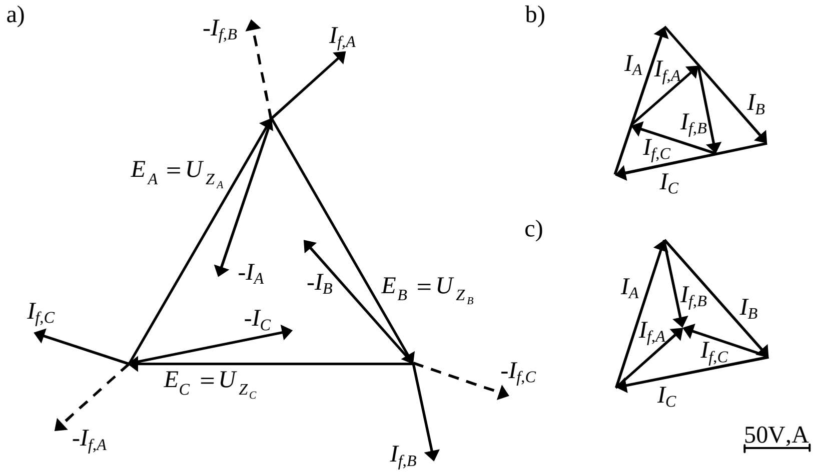
Prąd przewodowy dochodzący do symetrycznego odbiornika połączonego w trójkąt jest o $\sqrt{3}$ razy większy od prądu fazowego, wynika to z zależności trygonometrycznych wykresu wskazowego dla układu symetrycznego, np. wykres wskazowy rys. 16.13.
Przesunięcie fazowe pomiędzy przebiegiem napięcia na odbiorniku u_{Z_A} a przebiegiem prądu fazowego przepływającego przez odbiornik $i_{f,A}$ można wyznaczyć z trójkąta impedancji odbiornika, tzn.

$$\varphi_{u_{Z_A}, i_{f,A}} = \begin{cases} \arccos\left(\dfrac{R_A}{Z_A}\right) dla\ X_{A,L} > X_{A,C} \\ -\arccos\left(\dfrac{R_A}{Z_A}\right) dla\ X_{A,C} > X_{A,L} \end{cases} \tag{16.80}$$

Wartości skuteczne napięcia i prądu oraz przesunięcia fazowego we wszystkich fazach, dla układu symetrycznego, są równe.

Przykład 1

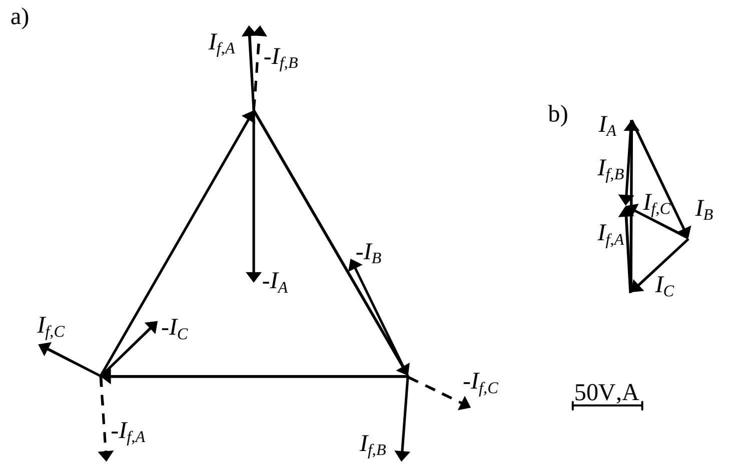
Na rys. 16.13 przedstawiono wykres wskazowy wartości skutecznych układu symetrycznego trójkąt – trójkąt dla $E_A = E_B = E_C = 220$ V, $\varphi_e = 60°$, $\underline{Z}_{A,B,C} = R + \mathrm{j}X$, $R = 3\,\Omega$, $X = 1\,\Omega$, czyli odbiornik symetryczny o charakterze rezystancyjno – indukcyjnym.
Po obliczeniach obwodu uzyskano następujące wyniki, wartości skuteczne prądów przewodowych $I_A = I_B = I_C = 120{,}4$ A, przesunięcia fazowe wektora prądu przewodowego $\varphi_{I_A} = 71{,}5°$, $\varphi_{I_B} = -48{,}4°$, $\varphi_{I_C} = -168{,}4°$, wartości skuteczne prądów fazowych $I_{f,A} = I_{f,B} = I_{f,C} = 69{,}5$ A, przesunięcia fazowe wektora prądu fazowego $\varphi_{I_{f,A}} = 41{,}5°$, $\varphi_{I_{f,B}} = 78{,}4°$, $\phi_{I_{f,C}} = 161{,}5°$ oraz przesunięcie fazowe pomiędzy wektorami napięć na odbiorniku U_{Z_A}, U_{Z_B}, U_{Z_C} a wektorem prądów fazowych $I_{f,A}$, $I_{f,B}$, $I_{f,C}$ wynosi $\varphi_{U_{Z_A}, I_{f,A}} = \varphi_{U_{Z_B}, I_{f,B}} = \varphi_{U_{Z_C}, I_{f,C}} = 18{,}4°$. Przesunięcia fazowe wektorów odpowiadają przesunięciom fazowym odpowiednich przebiegów czasowych.



Rys. 16.13a) Wykres wskazowy układu symetrycznego trójkąt – trójkąt dla wartości skutecznych, b, c) przesunięte wektory prądu

Przykład 2

Na rys. 16.14 przedstawiono wykres wskazowy wartości skutecznych układu niesymetrycznego trójkąt – trójkąt dla $E_A = E_B = E_C = 220$ V, $\varphi_e = 60°$, $\underline{Z}_{A,B,C} = R_{A,B,C} + \mathrm{j}X_{A,B,C}$, $R_A = 3\ \Omega$, $R_B = 3\ \Omega$, $R_C = 4\ \Omega$, $X_A = -2\ \Omega$, $X_B = 2\ \Omega$, $X_C = 2\ \Omega$, czyli odbiornik niesymetryczny o charakterze rezystancyjno–indukcyjno – pojemnościowym.

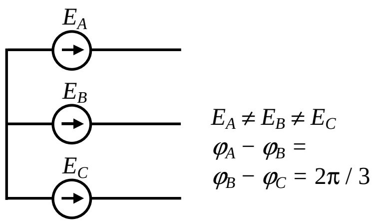


Rys. 16.14a) Wykres wskazowy układu niesymetrycznego trójkąt – trójkąt dla wartości skutecznych, b) przesunięte wektory prądu

Po obliczeniach obwodu uzyskano następujące wyniki, wartości skuteczne prądu przewodowego $I_A = 121{,}7$ A, $I_B = 92$ A, $I_C = 55{,}8$ A, przesunięcia fazowe wektora prądu przewodowego $\varphi_{I_A} = 90°$, $\varphi_{I_B} = -64{,}1°$, $\varphi_{I_C} = -135{,}8°$, wartości skuteczne prądów fazowych $I_{f,A} = 61\,\mathrm{A}$, $I_{f,B} = 61\,\mathrm{A}$, $I_{f,C} = 49{,}1\,\mathrm{A}$, przesunięcia fazowe wektora prądu fazowego $\varphi_{I_{f,A}} = 93{,}6°$, $\varphi_{I_{f,B}} = -93{,}6°$, $\varphi_{I_{f,C}} = 153{,}4°$ oraz przesunięcie fazowe pomiędzy wektorami napięć na odbiorniku U_{Z_A}, U_{Z_B}, U_{Z_C} a wektorem prądów fazowych $I_{f,A}$, $I_{f,B}$, $I_{f,C}$ wynosi $\varphi_{U_{Z_A},I_{f,A}} = -33{,}6°$, $\varphi_{U_{Z_B},I_{f,B}} = 33{,}6°$, $\varphi_{U_{Z_C},I_{f,C}} = 26{,}5°$. Przesunięcia fazowe wektorów odpowiadają przesunięciom fazowym odpowiednich przebiegów czasowych.

17. SKŁADOWE SYMETRYCZNE

W przypadku analizowania układów trójfazowych niesymetrycznych, w których moduły sił elektromotorycznych źródeł są różne $E_A \neq E_B \neq E_C$ lecz zachowana jest symetria przesunięcia fazowego $\phi_A - \phi_B = \phi_B - \phi_C = 2\pi/3$, można stosować metodę składowych symetrycznych. Polega ona na przekształceniu układu niesymetrycznego na trzy układy symetryczne nazywane zerowej, zgodnej i przeciwnej kolejności faz. Następnie przy analizowaniu układu niesymetrycznego stosuje się metodę superpozycji trzech układów symetrycznych.
Rozpatrzmy układ trójfazowy niesymetryczny rys. 17.1, w którym siły elektromotoryczne źródeł opisane są wzorami



Rys. 17.1. Układ trójfazowy niesymetryczny połączony w gwiazdę

$$e_A = E_{Am} \sin(\omega t + \varphi_u) \tag{17.1}$$

$$e_B = E_{Bm} \sin\left(\omega t + \varphi_u - \frac{2\pi}{3}\right) \tag{17.2}$$

$$e_C = E_{Cm} \sin\left(\omega t + \varphi_u - \frac{4\pi}{3}\right) \tag{17.3}$$

gdzie $E_{Am,Bm,Cm} = \sqrt{2}\, E_{A,B,C}$ oraz $E_A \neq E_B \neq E_C$.

W układzie trójfazowym niesymetrycznym dla chwili $t = 0$, napięcia źródeł przedstawia się w postaci zespolonej

$$\underline{E}_A = E_A e^{\mathrm{j}\varphi_u}, \quad \underline{E}_B = E_B e^{\mathrm{j}\left(\varphi_u - \frac{2\pi}{3}\right)}, \quad \underline{E}_C = E_C e^{\mathrm{j}\left(\varphi_u - \frac{4\pi}{3}\right)} \tag{17.4}$$

i przekształca się na trzy układy symetryczne rys. 17.2, mianowicie zerowej kolejności faz

$$\underline{E}_{A0} = \underline{E}_{B0} = \underline{E}_{C0} \tag{17.5}$$

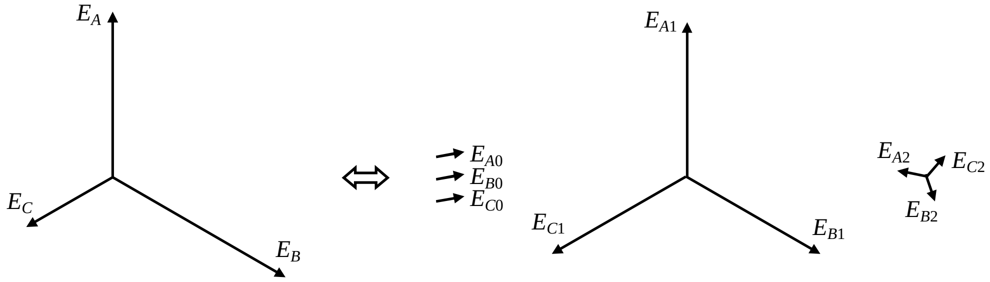
zgodnej kolejności faz

$$\underline{E}_{A1}, \quad \underline{E}_{B1} = \underline{E}_{A1} a^2, \quad \underline{E}_{C1} = \underline{E}_{A1} a \tag{17.6}$$

oraz przeciwnej kolejności faz

$$\underline{E}_{A2}, \quad \underline{E}_{B2} = \underline{E}_{A2} a, \quad \underline{E}_{C2} = \underline{E}_{A2} a^2 \tag{17.7}$$

gdzie $a = e^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}}$.



Rys. 17.2. Przekształcenie układu trójfazowego niesymetrycznego na układ symetryczny zerowej, zgodnej i przeciwnej kolejności faz, oznaczone przykładowe skuteczne wartości napięcia i prądu

Równania (17.5, 17.6, 17.7) zapisuje się w jeden układ równań

$$\begin{cases} \underline{E}_A = \underline{E}_{A0} + \underline{E}_{A1} + \underline{E}_{A2} \\ \underline{E}_B = \underline{E}_{B0} + \underline{E}_{B1} + \underline{E}_{B2} \\ \underline{E}_C = \underline{E}_{C0} + \underline{E}_{C1} + \underline{E}_{C2} \end{cases} \tag{17.8}$$

Wiedząc, że układy zerowej, zgodnej i przeciwnej kolejności faz są symetryczne (17.5, 17.6, 17.7), stosując podstawienia co do fazy A

$$\underline{E}_{B0} = \underline{E}_{A0}\,, \quad \underline{E}_{C0} = \underline{E}_{A0} \tag{17.09}$$

$$\underline{E}_{B1} = \underline{E}_{A1}a^2\,, \quad \underline{E}_{C1} = \underline{E}_{A1}a \tag{17.10}$$

$$\underline{E}_{B2} = \underline{E}_{A2}a\,, \quad \underline{E}_{C2} = \underline{E}_{A2}a^2 \tag{17.11}$$

otrzymujemy układ trzech równań z trzema niewiadomymi

$$\begin{cases} \underline{E}_A = \underline{E}_{A0} + \underline{E}_{A1} + \underline{E}_{A2} \\ \underline{E}_B = \underline{E}_{A0} + \underline{E}_{A1}a^2 + \underline{E}_{A2}a \\ \underline{E}_C = \underline{E}_{A0} + \underline{E}_{A1}a + \underline{E}_{A2}a^2 \end{cases} \tag{17.12}$$

Oznaczając wektor szukanych $\underline{E}_{A0,1,2}$ reprezentujący zespolone wartości napięć składowych oraz wektor wyrazów wolnych $\underline{E}_{A,B,C}$ reprezentujący zespolone wartości napięć układu niesymetrycznego przez

$$\underline{E}_{A0,1,2} = \begin{Bmatrix} \underline{E}_{A0} \\ \underline{E}_{A1} \\ \underline{E}_{A2} \end{Bmatrix}, \quad \underline{E}_{A,B,C} = \begin{Bmatrix} \underline{E}_{A} \\ \underline{E}_{B} \\ \underline{E}_{C} \end{Bmatrix} \tag{17.13}$$

oraz oznaczając macierz współczynników

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \tag{17.14}$$

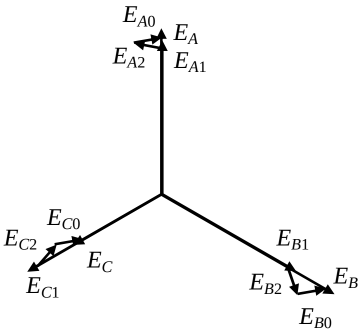
układ równań (17.14) możemy zapisać w postaci macierzowej

$$\underline{S} \cdot \underline{E}_{A0,1,2} = \underline{E}_{A,B,C} \tag{17.15}$$

którego rozwiązaniem jest

$$\underline{E}_{A0,1,2} = \underline{S}^{-1} \cdot \underline{E}_{A,B,C} \tag{17.16}$$

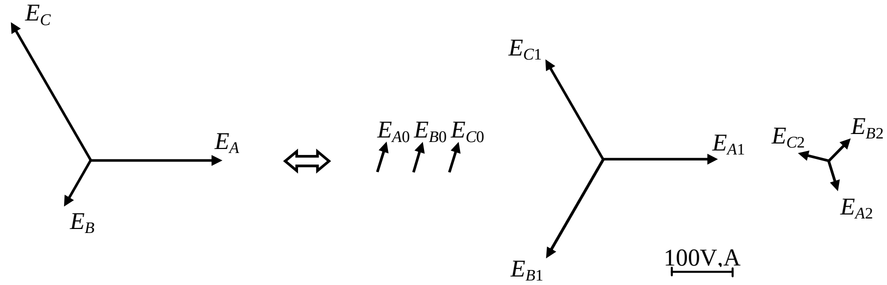
Ostatecznie otrzymujemy szukane zespolone wartości napięć źródeł dla zerowej, zgodnej i przeciwnej kolejności faz dla fazy *A*.
Wartości zespolone napięć źródeł zerowej, zgodnej i przeciwnej kolejności faz dla faz *B*, *C* określone są wzorami (17.09, 17.10, 17.11).
Znając natomiast trzy układy symetryczne zerowej, zgodnej i przeciwnej kolejności faz $\underline{E}_{A0,1,2}$, $\underline{E}_{B0,1,2}$, $\underline{E}_{C0,1,2}$, stosując przekształcenie odwrotne, możemy otrzymać według układu równań (17.8) układ niesymetryczny $\underline{E}_{A,B,C}$, rys. 17.3.



Rys. 17.3. Przekształcenie układów symetrycznych zerowej, zgodnej i przeciwnej kolejności faz na układ trójfazowy niesymetryczny, oznaczone przykładowe skuteczne wartości napięcia i prądu

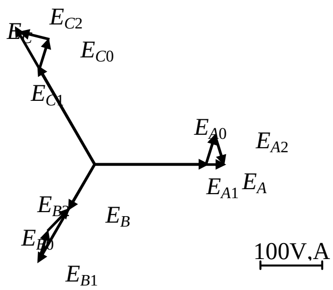
Przykład 1

Na rys. 17.4 przedstawiono wykres wskazowy dla wartości skutecznych układu trójfazowego niesymetrycznego o parametrach $E_A = 220$ V, $\varphi_{E_A} = 0$, $E_B = 88$ V, $E_C = 264$ V oraz jego przekształcenie na składowe symetryczne zerowej, zgodnej i przeciwnej kolejności faz.
Po obliczeniach składowych symetrycznych dla obwodu trójfazowego niesymetrycznego uzyskano następujące wyniki obliczeń, moduły napięć źródeł dla składowej zerowej wynoszą $E_{A0} = E_{B0} = E_{C0} = 52{,}8$ V a przesunięcia fazowe $\varphi_{E_{A0}} = \varphi_{E_{B0}} = \varphi_{E_{C0}} = 73{,}8°$, obliczenia dla składowej zgodnej wynoszą $E_{A1} = E_{B1} = E_{C1} = 190{,}6$ V, $\varphi_{E_{A1}} = 0$, $\varphi_{E_{B1}} = -120°$, $\varphi_{E_{C1}} = 120°$, obliczenia dla składowej przeciwnej wynoszą $E_{A2} = E_{B2} = E_{C2} = 52{,}8$ V, $\varphi_{E_{A2}} = -73{,}8°$, $\varphi_{E_{B2}} = 46{,}1°$, $\varphi_{E_{C2}} = 166{,}1°$.



Rys. 17.4. Przykład przekształcenia układu trójfazowego niesymetrycznego na układ symetryczny zerowej, zgodnej i przeciwnej kolejności faz, oznaczone wartości skuteczne napięcia i prądu

Na rys. 17.5 przedstawiono przekształcenie odwrotne, mianowicie ze składowych symetrycznych, obliczenia powyżej, na układ trójfazowy niesymetryczny.

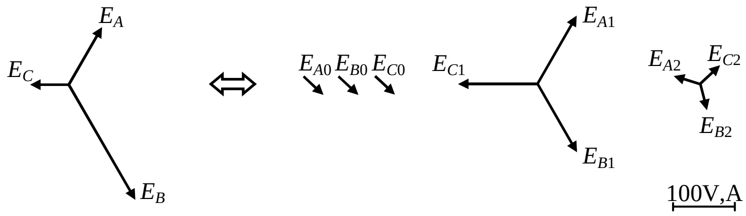


Rys. 17.5. Przykład przekształcenia odwrotnego ze składowych symetrycznych na układ trójfazowy niesymetryczny, oznaczone wartości skuteczne napięcia i prądu

Stosując przekształcenie odwrotne do znanych składowych symetrycznych, otrzymujemy zespolone wartości napięcia źródeł układu trójfazowego niesymetrycznego, tzn. $E_A = 220$ V, $\varphi_{E_A} = 0$, $E_B = 88$ V, $\varphi_{E_B} = -120°$, $E_C = 264$ V, $\varphi_{E_C} = 120°$.

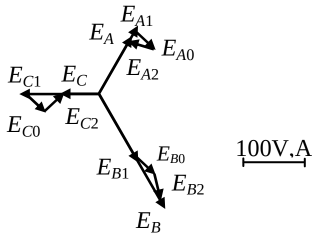
Przykład 2

Na rys. 17.6 przedstawiono wykres wskazowy dla wartości skutecznych układu trójfazowego niesymetrycznego o parametrach $E_A = 110$ V, $\varphi_{E_A} = 60°$, $E_B = 220$ V, $E_C = 66$ V oraz jego przekształcenie na składowe symetryczne zerowej, zgodnej i przeciwnej kolejności faz.
Po obliczeniach składowych symetrycznych dla obwodu trójfazowego niesymetrycznego uzyskano następujące wyniki obliczeń, moduły napięć źródeł dla składowej zerowej wynoszą $E_{A0} = E_{B0} = E_{C0} = 45{,}7$ V a przesunięcia fazowe $\varphi_{E_{A0}} = \varphi_{E_{B0}} = \varphi_{E_{C0}} = -43{,}8°$, obliczenia dla składowej zgodnej wynoszą $E_{A1} = E_{B1} = E_{C1} = 132$ V, $\varphi_{E_{A1}} = 60°$, $\varphi_{E_{B1}} = -60°$, $\varphi_{E_{C1}} = 180°$, obliczenia dla składowej przeciwnej wynoszą $E_{A2} = E_{B2} = E_{C2} = 45{,}7$ V, $\varphi_{E_{A2}} = 163{,}8°$, $\varphi_{E_{B2}} = -76{,}1°$, $\varphi_{E_{C2}} = 43{,}8°$.



Rys. 17.6. Przykład przekształcenia układu trójfazowego niesymetrycznego na układ symetryczny zerowej, zgodnej i przeciwnej kolejności faz, oznaczone wartości skuteczne napięcia i prądu

Na rys. 17.7 przedstawiono przekształcenie odwrotne, mianowicie ze składowych symetrycznych, obliczenia powyżej, na układ trójfazowy niesymetryczny.



Rys. 16.7. Przykład przekształcenia odwrotnego ze składowych symetrycznych na układ trójfazowy niesymetryczny

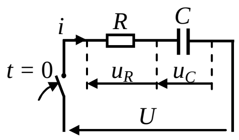
Stosując przekształcenie odwrotne do znanych składowych symetrycznych, otrzymujemy zespolone wartości napięcia źródeł układu trójfazowego niesymetrycznego, tzn. $E_A = 110$ V, $\varphi_{E_A} = 60°$, $E_B = 220$ V, $\varphi_{E_B} = -60°$, $E_C = 66$ V, $\varphi_{E_C} = 180°$.

18. STANY NIEUSTALONE – METODA KLASYCZNA

Stan nieustalony to stan, w którym przebieg napięcia i prądu zmienia się dynamicznie w czasie. Jest to stan przejściowy pomiędzy dwoma stanami ustalonymi. Dzieje się tak podczas załączenia i wyłączenia elementów posiadających bezwładność przewodzenia prądu takich jak cewka czy kondensator. Typowym stanem nieustalonym przejściowym jest proces ładowania lub rozładowania kondensatora.
Metoda klasyczna rozwiązywania obwodów o stanach nieustalonych polega na rozwiązaniu równania różniczkowego opisującego związek pomiędzy odpowiedzią układu a wymuszeniem. Stałe całkowania otrzymuje się z warunków początkowych.

18.1. Ładowanie kondensatora, wymuszenie stałe

Rozpatrzmy obwód *RC* rys. 18.1, w którym od chwili $t = 0$ kondensator jest ładowany ze źródła napięcia stałego *U*.



Rys. 18.1. Gałąź szeregowa elementów *RC*, ładowanie kondensatora *C*

Napięcie na elementach obwodu możemy opisać II prawem Kirchhoffa

$$u_R + u_C = U \tag{18.1}$$

Dla

$$u_R = Ri\,, \quad i = C\frac{du_C}{dt} \quad \Rightarrow \quad u_R = RC\frac{du_C}{dt} \tag{18.2}$$

otrzymujemy równanie różniczkowe zwyczajne niejednorodne, które opisuje całkowite napięcie na kondensatorze

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = U \tag{18.3}$$

Równanie różniczkowe (18.3) rozwiążemy metodą przewidywań.
Całką (rozwiązaniem) ogólną równania jednorodnego dla równania różniczkowego niejednorodnego (18.3) jest

$$u_{Co} = Ae^{\frac{-t}{\tau}} \tag{18.4}$$

gdzie A – dowolna stała, $\tau = RC$ – stała czasowa.
Przewidujemy całkę szczególną równania niejednorodnego (18.3) w postaci

$$u_{Cs} = B \tag{18.5}$$

dla której pochodna wynosi

$$\frac{du_{Cs}}{dt} = \frac{d}{dt}B = 0 \tag{18.6}$$

Podstawiając równania (18.5, 18.6) do (18.3) otrzymujemy

$$B = U \tag{18.7}$$

Wówczas całka szczególna równania niejednorodnego (18.3) wynosi

$$u_{Cs} = U \tag{18.8}$$

Całka ogólna równania różniczkowego niejednorodnego (18.3) przyjmuje postać

$$u_C = u_{Co} + u_{Cs} = Ae^{\frac{-t}{\tau}} + U \tag{18.9}$$

Korzystając z warunku ciągłości napięcia w chwili załączenia obwodu dla $t = 0$ możemy napisać

$$u_C\left(t={}^-0\right)=u_C\left(t=0\right)=0=u_{Co}+u_{Cs}=Ae^{\frac{-t}{\tau}}+U \quad \Rightarrow \quad A=-U \qquad (18.10)$$

gdzie założono, że kondensator przed załączeniem dla $t=0$ był rozładowany $u_C\left(t={}^-0\right)=0$.
Ostatecznie otrzymujemy wzór na wartość chwilową napięcia na kondensatorze

$$u_C=u_{Co}+u_{Cs} \quad \Rightarrow \quad u_C=-Ue^{-\frac{t}{\tau}}+U=U\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad (18.11)$$

gdzie wielkość u_C wzrasta wykładniczo od 0 do U.
Napięcie na rezystorze wyznaczamy ze wzoru (18.2)

$$u_R=RC\frac{du_C}{dt}=RC\frac{d}{dt}U\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)=Ue^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (18.12)$$

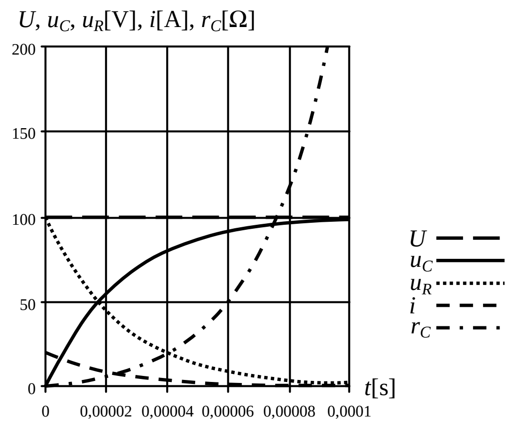
które maleje wykładniczo od U do 0.
Prąd w rozpatrywanym obwodzie wynosi

$$i=\frac{u_R}{R}=\frac{U}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (18.13)$$

i zanika wykładniczo od U/R do 0.
Opór jaki stawia prądowi kondensator podczas ładowania można określić z zależności

$$r_C(u_C,i)=\frac{u_C(t)}{i(t)} \qquad (18.14)$$

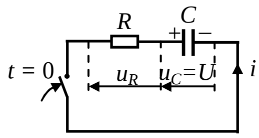
Opór kondensatora dla prądu nie wynika z właściwości materiałowych lecz ze stanu naładowania okładek kondensatora ponieważ dochodzi do odpychania ładunków jednakoimiennych. Można zauważyć, że dla prądu stałego w pierwszej chwili ładowania dla $t=0$ rezystancja kondensatora idealnego równa jest zeru $R=0$, natomiast w stanie naładowania jest nieskończenie wielka $R\to\infty$.



Rys. 18.2. Wykres napięcia, prądu i rezystancji w obwodzie RC ładowania kondensatora dla $U=100$ V, $R=5$ Ω, $C=5$ μF

18.2. Rozładowywanie kondensatora

Rozpatrzmy teraz przypadek rozładowywania kondensatora w obwodzie *RC* rys. 18.3, w którym od chwili $t=0$ kondensator naładowany do wartości *U* jest rozładowywany przez rezystor *R*.



Rys. 18.3. Gałąź szeregowa elementów *RC*, rozładowywanie kondensatora *C*

Napięcie na elementach obwodu możemy opisać II prawem Kirchhoffa

$$u_R + u_C = 0 \tag{18.15}$$

Dla

$$u_R = Ri\,,\quad i = C\frac{du_C}{dt} \quad \Rightarrow \quad u_R = RC\frac{du_C}{dt} \tag{18.16}$$

otrzymujemy równanie różniczkowe zwyczajne jednorodne, które opisuje całkowite napięcie na kondensatorze

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \tag{18.17}$$

Całką (rozwiązaniem) ogólną równania różniczkowego jednorodnego (18.17) jest

$$u_C = Ae^{\frac{-t}{\tau}} \tag{18.18}$$

gdzie *A* – dowolna stała, $\tau = RC$ – stała czasowa.
Stałą *A* wyznacza się z warunku ciągłości napięcia na kondensatorze zakładając, że w chwili załączenia obwodu dla $t=0$ kondensator był naładowany do napięcia *U*, tzn. $u_C\left(t={}^{-}0\right)=U$.

$$u_C\left(t={}^{-}0\right) = u_C\left(t=0\right) = U = u_C = Ae^{\frac{-t}{\tau}} \quad \Rightarrow \quad A = U \tag{18.19}$$

Ostatecznie otrzymujemy wzór na wartość chwilową napięcia na kondensatorze

$$u_C = Ue^{-\frac{t}{\tau}} \tag{18.20}$$

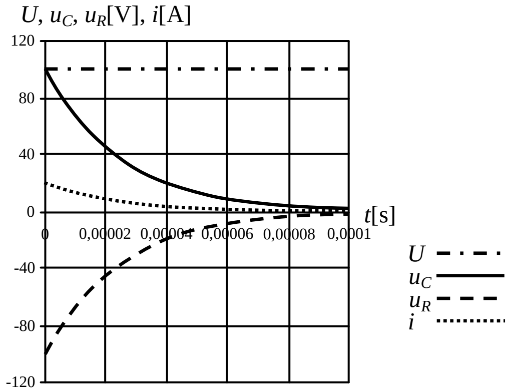
gdzie wielkość u_C maleje wykładniczo od *U* do 0.
Napięcie na oporniku wyraża się wzorem

$$u_R = -u_C \tag{18.21}$$

Prąd w rozpatrywanym obwodzie

$$i = -\frac{u_R}{R} = \frac{U}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{18.22}$$

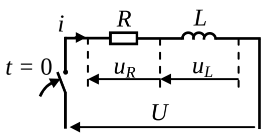
zanika wykładniczo od U/R do 0.



Rys. 18.4. Wykres napięcia i prądu w obwodzie *RC* rozładowania kondensatora od wartości napięcia $U = 100$ V do 0 V dla $R = 5\ \Omega$, $C = 5\ \mu F$

18.3. Magnesowanie cewki, wymuszenie stałe

Rozpatrzmy obwód *RL* rys. 18.5, w którym od chwili $t = 0$ cewka jest magnesowana ze źródła napięcia stałego *U*.



Rys. 18.5. Gałąź szeregowa elementów *RL*, magnesowanie cewki *L*

Napięcie na elementach obwodu możemy opisać II prawem Kirchhoffa

$$u_L + u_R = U \tag{18.23}$$

Dla

$$u_L = L\frac{di}{dt}, \quad u_R = Ri \tag{18.24}$$

otrzymujemy równanie różniczkowe zwyczajne niejednorodne, które opisuje całkowity prąd w obwodzie

$$L\frac{di}{dt} + Ri = U \quad \Rightarrow \quad \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{U}{L} \tag{18.25}$$

Równanie różniczkowe (18.25) rozwiążemy metodą przewidywań.
Całką (rozwiązaniem) ogólną równania jednorodnego dla równania różniczkowego niejednorodnego (18.25) jest

$$i_o = Ae^{\frac{-t}{\tau}} \tag{18.26}$$

gdzie *A* – dowolna stała, $\tau = L/R$.

Przewidujemy całkę szczególną równania niejednorodnego (18.25) w postaci

$$i_s = B \tag{18.27}$$

dla której pochodna wynosi

$$\frac{di_s}{dt} = \frac{d}{dt}B = 0 \tag{18.28}$$

Podstawiając równania (18.27, 18.28) do (18.25) otrzymujemy

$$B = \frac{U}{R} \tag{18.29}$$

Wówczas całka szczególna równania niejednorodnego (18.25) wynosi

$$i_s = \frac{U}{R} \tag{18.30}$$

Całka ogólna równania różniczkowego niejednorodnego (18.25) przyjmuje postać

$$i = i_o + i_s = Ae^{\frac{-t}{\tau}} + \frac{U}{R} \tag{18.31}$$

Stałą *A* wyznacza się z warunku ciągłości prądu zakładając, że w chwili załączenia obwodu dla $t = 0$ przez cewkę nie płynął prąd, tzn. $i(t={}^{-}0) = 0$.

$$i(t={}^{-}0) = i(t = 0) = 0 = i_o + i_s = Ae^{\frac{-t}{\tau}} + \frac{U}{R} \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{U}{R} \tag{18.32}$$

Wówczas otrzymujemy wzór na wartość chwilową prądu w obwodzie

$$i = i_o + i_s \quad \Rightarrow \quad i = -\frac{U}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{U}{R} = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \tag{18.33}$$

gdzie wielkość *i* rośnie wykładniczo od 0 do U/R.
Napięcie na cewce i rezystorze wyznaczamy ze wzorów (18.24)

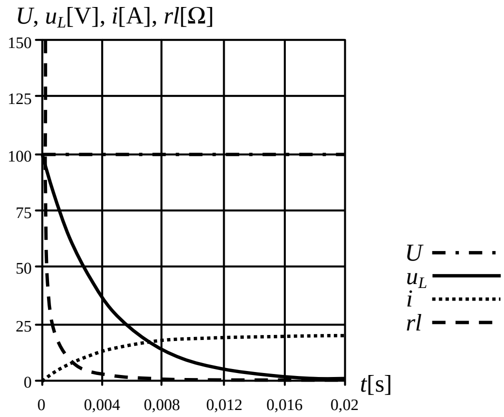
$$u_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{d}{dt}\frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = Ue^{-\frac{t}{\tau}} \tag{18.34}$$

$$u_R = Ri = U\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \tag{18.35}$$

Napięcie na cewce maleje wykładniczo od *U* do 0, natomiast napięcie na rezystorze rośnie wykładniczo od 0 do *U*.
Opór jaki stawia przepływowi prądu cewka można określić z zależności

$$r_l(u,i) = \frac{u_L(t)}{i(t)} \tag{18.36}$$

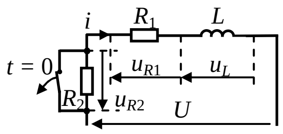
Opór ten nie wynika z właściwości materiałowych cewki, lecz z oporu dla przepływającego prądu jaki stawia materia wprowadzana w ruch wirowy (pole magnetyczne jest polem wirowym). Zmiana prądu wymusza pracę na pokonanie momentu bezwładności wirującej materii. Jeżeli przepływający prąd ma stałą wartość, energia kinetyczna ruchu wirowego materii w otoczeniu cewki będzie dążyć do ustalonej wartości, wówczas opór cewki jaki stawia przepływającemu prądowi materia będzie zanikał do zera.



Rys. 18.6. Wykres napięcia i prądu w obwodzie *RL* magnesowania cewki dla $U = 100$ V, $R = 5\ \Omega$, $L = 20$ mH

18.4. Rozmagnesowywanie cewki

Rozpatrzmy teraz obwód *RL* rys. 18.7, w którym od chwili $t = 0$ cewka jest rozmagnesowywana, tzn. przed chwilą $t = 0$ cewka była magnesowana prądem o wartości U/R_1 natomiast dla $t > 0$ cewka jest magnesowana mniejszym prądem o wartości $U/(R_1 + R_2)$.



Rys. 18.7. Gałąź szeregowa elementów *RL*, rozmagnesowywanie cewki *L*

Napięcie na elementach obwodu, po otwarciu wyłącznika dla czasu $t > 0$ możemy opisać II prawem Kirchhoffa

$$u_L + u_{R_1} + u_{R_2} = U \tag{18.37}$$

Dla

$$u_L = L\frac{di}{dt}, \quad u_{R_1} = R_1 i, \quad u_{R_2} = R_2 i \tag{18.38}$$

otrzymujemy równanie różniczkowe zwyczajne niejednorodne, które opisuje całkowity prąd w obwodzie

$$L\frac{di}{dt}+R_1 i+R_2 i=U \quad \Rightarrow \quad \frac{di}{dt}+\frac{R_1+R_2}{L}i=\frac{U}{L} \tag{18.39}$$

Równanie różniczkowe (18.39) rozwiążemy metodą przewidywań.
Całką (rozwiązaniem) ogólną równania jednorodnego dla równania różniczkowego niejednorodnego (18.39) jest

$$i_o=Ae^{\frac{-t}{\tau}} \tag{18.40}$$

gdzie A – dowolna stała, $\tau=L/(R_1+R_2)$.
Przewidujemy całkę szczególną równania niejednorodnego (18.39) w postaci

$$i_s=B \tag{18.41}$$

dla której pochodna wynosi

$$\frac{di_s}{dt}=\frac{d}{dt}B=0 \tag{18.42}$$

Podstawiając równania (18.41, 18.42) do (18.39) otrzymujemy

$$B=\frac{U}{R_1+R_2} \tag{18.43}$$

Wówczas całka szczególna równania niejednorodnego (18.39) wynosi

$$i_s=\frac{U}{R_1+R_2} \tag{18.44}$$

Całka ogólna równania różniczkowego niejednorodnego (18.39) przyjmuje postać

$$i=i_o+i_s=Ae^{\frac{-t}{\tau}}+\frac{U}{R_1+R_2} \tag{18.45}$$

Stałą A wyznacza się z warunku ciągłości prądu zakładając, że w chwili załączenia obwodu dla $t=0$ przez cewkę płynął prąd o wartości U/R_1, tzn. $i(t={}^-0)=U/R_1$.

$$i(t={}^-0)=i(t=0)=\frac{U}{R_1}=i_o+i_s=Ae^{\frac{-t}{\tau}}+\frac{U}{R_1+R_2} \quad \Rightarrow \quad A=U\left[\frac{R_2}{R_1(R_1+R_2)}\right] \tag{18.46}$$

Wówczas otrzymujemy wzór na wartość chwilową prądu w obwodzie

$$i=i_o+i_s \quad \Rightarrow \quad i=U\left[\frac{R_2}{R_1(R_1+R_2)}\right]e^{-\frac{t}{\tau}}+\frac{U}{R_1+R_2}=\frac{U}{R_1+R_2}\left(1+\frac{R_2}{R_1}e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \tag{18.47}$$

gdzie wielkość i maleje od U/R_1 do $U/(R_1+R_2)$.

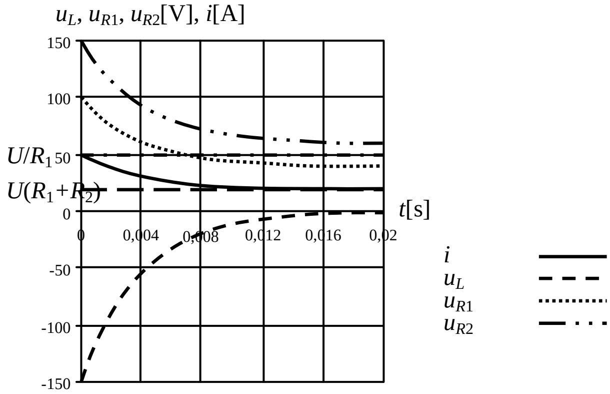
Napięcie na cewce i rezystorach wyznaczamy ze wzorów (18.38)

$$u_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{d}{dt}\frac{U}{R_1+R_2}\left(1+\frac{R_2}{R_1}e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = -U\frac{R_2}{R_1}e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{18.48}$$

$$u_{R_1} = R_1 i = R_1\frac{U}{R_1+R_2}\left(1+\frac{R_2}{R_1}e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \tag{18.49}$$

$$u_{R_2} = R_2 i = R_2\frac{U}{R_1+R_2}\left(1+\frac{R_2}{R_1}e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \tag{18.50}$$

Wartość bezwzględna napięcia na cewce maleje wykładniczo od $(-UR_2)/R_1$ do 0, napięcie na rezystorze R_1 maleje wykładniczo od U do $(UR_1)/(R_1+R_2)$, natomiast napięcie na rezystorze R_2 maleje wykładniczo od $(UR_2)/R_1$ do $(UR_2)/(R_1+R_2)$.

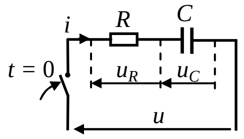


Rys. 18.8. Wykres napięcia i prądu w obwodzie *RL* rozmagnesowywania cewki dla $U = 100$ V, $R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 3\ \Omega$, $L = 20$ mH

18.5. Kondensator zasilany napięciem sinusoidalnym

Rozpatrzmy obwód *RC*, rys. 18.9, w którym od chwili $t = 0$ kondensator jest zasilany ze źródła napięcia przemiennego

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi) \tag{18.51}$$



Rys. 18.9. Gałąź szeregowa elementów *RC* zasilana napięciem sinusoidalnym

Przypadek 1. Przesunięcie fazowe napięcia zasilania $\varphi = 0$, czyli napięcie wymuszenia prądu w obwodzie w chwili $t = 0$ wynosi $U_m \sin(\omega t) = 0$.

Napięcie na elementach obwodu możemy opisać II prawem Kirchhoffa

$$u_R + u_C = U_m \sin \omega t \tag{18.52}$$

Dla

$$u_R = Ri\,, \quad i = C\frac{du_C}{dt} \quad \Rightarrow \quad u_R = RC\frac{du_C}{dt} \tag{18.53}$$

otrzymujemy równanie różniczkowe zwyczajne niejednorodne, które opisuje całkowite napięcie na kondensatorze

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = U_m \sin \omega t \quad \Rightarrow \quad \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = \frac{U_m}{RC}\sin \omega t \tag{18.54}$$

Równanie różniczkowe (18.54) rozwiążemy metodą przewidywań.
Całką (rozwiązaniem) ogólną równania jednorodnego dla równania różniczkowego niejednorodnego (18.54) jest

$$u_{Co} = A_o e^{\frac{-t}{\tau}} \tag{18.55}$$

gdzie A_o – dowolna stała, $\tau = RC$ – stała czasowa.
Przewidujemy całkę szczególną równania niejednorodnego (18.54) w postaci

$$u_{Cs} = A\sin \omega t + B\cos \omega t \tag{18.56}$$

dla której pochodna wynosi

$$\frac{du_{Cs}}{dt} = A\omega \cos \omega t - B\omega \sin \omega t \tag{18.57}$$

Podstawiając równania (18.56, 18.57) do (18.54) otrzymujemy

$$\left(\frac{1}{RC}A - \omega B\right)\sin \omega t + \left(\frac{1}{RC}B + \omega A\right)\cos \omega t = \frac{U_m}{RC}\sin \omega t \tag{18.58}$$

Równanie (18.58) jest spełnione gdy zachodzą warunki

$$\frac{1}{RC}A - \omega B = \frac{U_m}{RC} \tag{18.59}$$

$$\frac{1}{RC}B + \omega A = 0 \tag{18.60}$$

Z układu równań (18.59, 18.60) otrzymujemy stałe A oraz B

$$A = \frac{U_m}{(\omega RC)^2}\,, \quad B = -\frac{U_m}{\omega RC} \tag{18.61}$$

Podstawiając stałe (18.61) do równania (18.56) otrzymujemy całkę szczególną równania niejednorodnego (18.54)

$$u_{Cs} = \frac{U_m}{(\omega RC)^2}\sin\omega t - \frac{U_m}{\omega RC}\cos\omega t \tag{18.62}$$

Całka ogólna równania różniczkowego niejednorodnego (18.54) przyjmuje postać

$$u_C = u_{Co} + u_{Cs} = A_o e^{\frac{-t}{\tau}} + \frac{U_m}{(\omega RC)^2}\sin\omega t - \frac{U_m}{\omega RC}\cos\omega t \tag{18.63}$$

Korzystając z warunku ciągłości napięcia w chwili załączenia obwodu dla $t = 0$ możemy napisać

$$\begin{gathered} u_C\left(t={}^{-}0\right) = u_C(t=0) = 0 = A_o e^{\frac{-t}{\tau}} + \frac{U_m}{(\omega RC)^2}\sin\omega t - \frac{U_m}{\omega RC}\cos\omega t \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad A_o = \frac{U_m}{\omega RC} \end{gathered} \tag{18.64}$$

gdzie założono, że kondensator przed załączeniem dla $t = 0$ był rozładowany, $u_C\left(t={}^{-}0\right) = u_C(t=0) = 0$.
Ostatecznie otrzymujemy wzór na wartość chwilową napięcia na kondensatorze

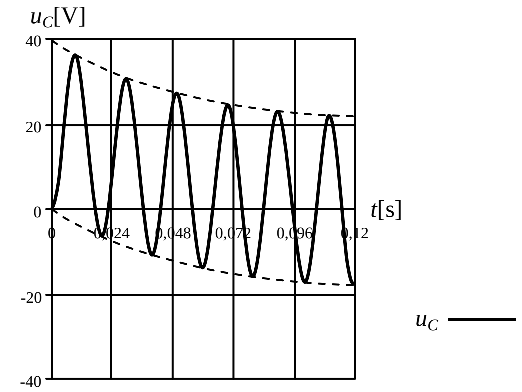
$$u_C = \frac{U_m}{\omega RC} e^{\frac{-t}{\tau}} + \frac{U_m}{(\omega RC)^2}\sin\omega t - \frac{U_m}{\omega RC}\cos\omega t \tag{18.65}$$

Prąd w rozpatrywanym obwodzie oraz napięcie na rezystorze otrzymujemy z zależności (18.53)

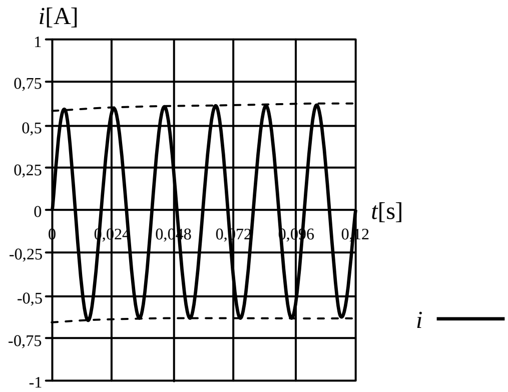
$$\begin{aligned} i &= C\frac{du_C}{dt} = C\frac{d}{dt}\left[\frac{U_m}{\omega RC} e^{\frac{-t}{\tau}} + \frac{U_m}{(\omega RC)^2}\sin\omega t - \frac{U_m}{\omega RC}\cos\omega t\right] = \\ &= -\frac{U_m}{\omega CR^2} e^{\frac{-t}{\tau}} + \frac{U_m}{\omega CR^2}\cos\omega t + \frac{U_m}{R}\sin\omega t \end{aligned} \tag{18.66}$$

$$u_R = Ri = -\frac{U_m}{\omega CR} e^{\frac{-t}{\tau}} + \frac{U_m}{\omega CR}\cos\omega t + U_m \sin\omega t \tag{18.67}$$

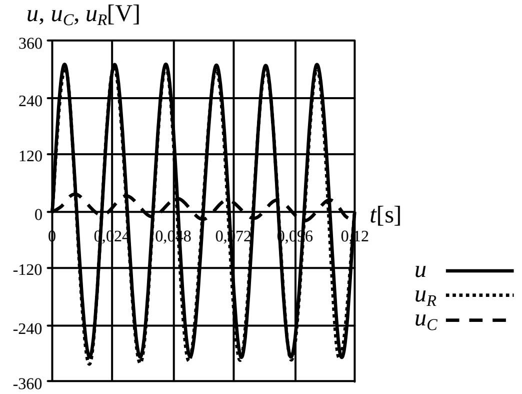
Na rys. 18.10, 18.11 oraz 18.12 przedstawiono przebiegi czasowe napięcia na kondensatorze $u_C = f(t)$, napięcia na rezystorze $u_R = f(t)$, prądu $i = f(t)$ oraz napięcia zasilania $u = f(t)$ dla obwodu RC zasilanego napięciem sinusoidalnym dla $U = 220$ V, $\varphi = 0$, $f = 50$ Hz, $R = 500\ \Omega$, $C = 100\ \mu$F.



Rys. 18.10. Wykres napięcia na kondensatorze w funkcji czasu $u_C = f(t)$ w obwodzie *RC* zasilanego napięciem sinusoidalnym dla $U = 220$ V, $\varphi = 0$, $f = 50$ Hz, $R = 500\ \Omega$, $C = 100\ \mu$F



Rys. 18.11. Wykres prądu w funkcji czasu $i = f(t)$ w obwodzie *RC* zasilanego napięciem sinusoidalnym dla $U = 220$ V, $\varphi = 0$, $f = 50$ Hz, $R = 500\ \Omega$, $C = 100\ \mu$F



Rys. 18.12. Wykres napięcia na kondensatorze w funkcji czasu $u_C = f(t)$, rezystorze $u_R = f(t)$ oraz napięcia zasilania $u = f(t)$ w obwodzie *RC* zasilanego napięciem sinusoidalnym dla $U = 220$ V, $\varphi = 0$, $f = 50$ Hz, $R = 500\ \Omega$, $C = 100\ \mu$F

Przypadek 2. Przesunięcie fazowe napięcia zasilania $\phi = \pi/2$, czyli napięcie wymuszenia prądu w obwodzie w chwili $t = 0$ wynosi $U_m \sin(\omega t + \pi/2) = U_m \cos(\omega t) = U_m$.
Napięcie na elementach obwodu możemy opisać II prawem Kirchhoffa, wówczas

$$u_R + u_C = U_m \cos\omega t \tag{18.68}$$

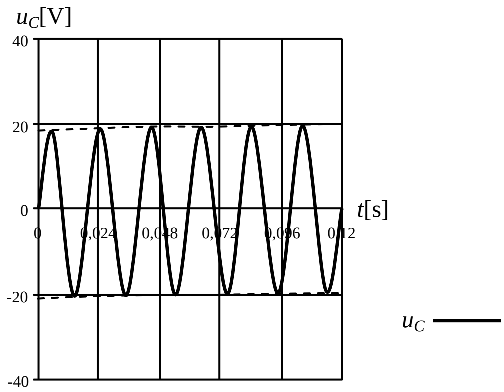
Postępując analogicznie jak w przypadku 1, dochodzimy do następujących wzorów na szukane wielkości chwilowe napięcia na kondensatorze u_C, prądu w obwodzie i oraz napięcia na rezystorze u_R

$$u_C = -\frac{U_m}{1+\omega^2 C^2 R^2} e^{\frac{-t}{\tau}} + \frac{U_m \omega CR}{1+\omega^2 C^2 R^2} \sin\omega t + \frac{U_m}{1+\omega^2 C^2 R^2} \cos\omega t \tag{18.69}$$

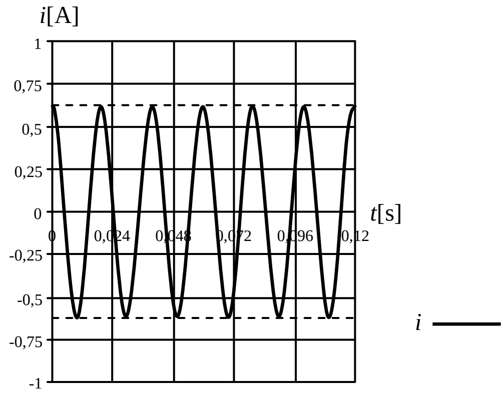
$$\begin{aligned} i = C\frac{du_C}{dt} = C\frac{d}{dt}\left[-\frac{U_m}{1+\omega^2 C^2 R^2} e^{\frac{-t}{\tau}} + \frac{U_m \omega CR}{1+\omega^2 C^2 R^2} \sin\omega t + \frac{U_m}{1+\omega^2 C^2 R^2} \cos\omega t\right] = \\ = \frac{U_m}{\left(1+\omega^2 C^2 R^2\right)R} e^{\frac{-t}{\tau}} + \frac{U_m \omega^2 C^2 R}{1+\omega^2 C^2 R^2} \cos\omega t - \frac{U_m \omega C}{1+\omega^2 C^2 R^2} \sin\omega t \end{aligned} \tag{18.70}$$

$$u_R = Ri = \frac{U_m}{1+\omega^2 C^2 R^2} e^{\frac{-t}{\tau}} + \frac{U_m \omega^2 C^2 R^2}{1+\omega^2 C^2 R^2} \cos\omega t - \frac{U_m \omega CR}{1+\omega^2 C^2 R^2} \sin\omega t \tag{18.71}$$

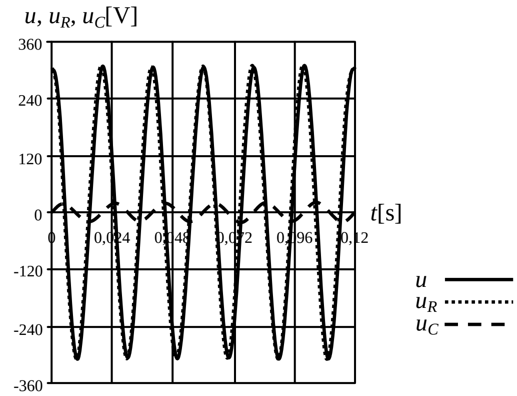
Na rys. 18.13, 18.14 oraz 18.15 przedstawiono przebiegi czasowe napięcia na kondensatorze $u_C = f(t)$, napięcia na rezystorze $u_R = f(t)$, prądu $i = f(t)$ oraz napięcia zasilania $u = f(t)$ dla obwodu RC zasilanego napięciem sinusoidalnym dla $U = 220$ V, $\phi = \pi/2$, $f = 50$ Hz, $R = 500\ \Omega$, $C = 100\ \mu$F.



Rys. 18.13. Wykres napięcia na kondensatorze w funkcji czasu $u_C = f(t)$ w obwodzie RC zasilanego napięciem sinusoidalnym dla $U = 220$ V, $\varphi = \pi/2$, $f = 50$ Hz, $R = 500\ \Omega$, $C = 100\ \mu$F



Rys. 18.14. Wykres prądu w funkcji czasu $i = f(t)$ w obwodzie *RC* zasilanego napięciem sinusoidalnym dla $U = 220$ V, $\varphi = \pi/2$, $f = 50$ Hz, $R = 500\ \Omega$, $C = 100\ \mu$F

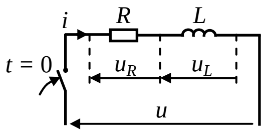


Rys. 18.15. Wykres napięcia na kondensatorze w funkcji czasu $u_C = f(t)$, rezystorze $u_R = f(t)$ oraz napięcia zasilania $u = f(t)$ w obwodzie *RC* zasilanego napięciem sinusoidalnym dla $U = 220$ V, $\phi = \pi/2$, $f = 50$ Hz, $R = 500\ \Omega$, $C = 100\ \mu$F

18.6. Cewka zasilana napięciem sinusoidalnym

Rozpatrzmy obwód *RL*, rys. 18.16, w którym od chwili $t = 0$ cewka zasilana jest ze źródła napięcia przemiennego

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi) \tag{18.72}$$



Rys. 18.16. Gałąź szeregowa elementów *RL* zasilana napięciem sinusoidalnym

Przypadek 1. Przesunięcie fazowe napięcia zasilania $\varphi = 0$, czyli napięcie wymuszenia prądu w obwodzie dla $t = 0$ wynosi $U_m \sin(\omega t) = 0$.

Napięcie na elementach obwodu możemy opisać II prawem Kirchhoffa

$$u_R + u_L = U_m \sin \omega t \tag{18.73}$$

Dla

$$u_R = Ri\,,\quad u_L = L\frac{di}{dt} \tag{18.74}$$

otrzymujemy równanie różniczkowe zwyczajne niejednorodne, które opisuje całkowity prąd w obwodzie

$$Ri + L\frac{di}{dt} = U_m \sin \omega t \quad \Rightarrow \quad \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{U_m}{L}\sin \omega t \tag{18.75}$$

Równanie różniczkowe (18.75) rozwiążemy metodą przewidywań.
Całką (rozwiązaniem) ogólną równania jednorodnego dla równania różniczkowego niejednorodnego (18.75) jest

$$i_o = A_o e^{\frac{-t}{\tau}} \tag{18.76}$$

gdzie A_o – dowolna stała, $\tau = L/R$ – stała czasowa.
Przewidujemy całkę szczególną równania niejednorodnego (18.75) w postaci

$$i_s = A\sin \omega t + B\cos \omega t \tag{18.77}$$

dla której pochodna wynosi

$$\frac{di_s}{dt} = A\omega \cos \omega t - B\omega \sin \omega t \tag{18.78}$$

Podstawiając równania (18.77, 18.78) do (18.75) otrzymujemy

$$\left(\frac{R}{L}A - \omega B\right)\sin \omega t + \left(\frac{R}{L}B + \omega A\right)\cos \omega t = \frac{U_m}{L}\sin \omega t \tag{18.79}$$

Równanie (18.79) jest spełnione gdy zachodzą warunki

$$\frac{R}{L}A - \omega B = \frac{U_m}{L} \tag{18.80}$$

$$\frac{R}{L}B + \omega A = 0 \tag{18.81}$$

Z układu równań (18.80, 18.81) otrzymujemy stałe A oraz B

$$A = \frac{U_m R}{R^2 + \omega^2 L^2}\,,\quad B = -\frac{U_m \omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \tag{18.82}$$

Podstawiając stałe (18.82) do równania (18.77) otrzymujemy całkę szczególną równania niejednorodnego (18.75)

$$i_s = \frac{U_m R}{R^2 + \omega^2 L^2} \sin \omega t - \frac{U_m \omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \cos \omega t \tag{18.83}$$

Całka ogólna równania różniczkowego niejednorodnego (18.75) przyjmuje postać

$$i = i_o + i_s = A_o e^{\frac{-t}{\tau}} + \frac{U_m R}{R^2 + \omega^2 L^2} \sin \omega t - \frac{U_m \omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \cos \omega t \tag{18.84}$$

Korzystając z warunku ciągłości prądu w chwili załączenia obwodu dla $t = 0$ możemy napisać

$$\begin{gathered} i\left(t={}^-0\right) = i\left(t = 0\right) = 0 = A_o e^{\frac{-t}{\tau}} + \frac{U_m R}{R^2 + \omega^2 L^2} \sin \omega t - \\ \frac{U_m \omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \cos \omega t \Rightarrow A_o = \frac{U_m \omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \end{gathered} \tag{18.85}$$

gdzie założono, że przed załączeniem dla $t = 0$ przez cewkę nie płynął prąd, $i\left(t={}^-0\right) = i\left(t = 0\right) = 0$.
Ostatecznie otrzymujemy wzór na wartość chwilową prądu w obwodzie

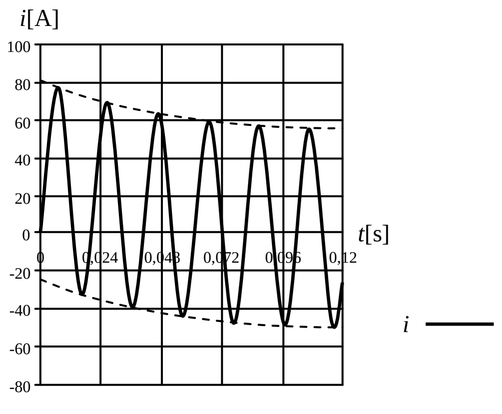
$$i = \frac{U_m \omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{\frac{-t}{\tau}} + \frac{U_m R}{R^2 + \omega^2 L^2} \sin \omega t - \frac{U_m \omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \cos \omega t \tag{18.86}$$

Napięcie na rezystorze oraz napięcie na cewce otrzymujemy z zależności (18.74)

$$u_R = Ri = \frac{U_m \omega L R}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{\frac{-t}{\tau}} + \frac{U_m R^2}{R^2 + \omega^2 L^2} \sin \omega t - \frac{U_m \omega L R}{R^2 + \omega^2 L^2} \cos \omega t \tag{18.87}$$

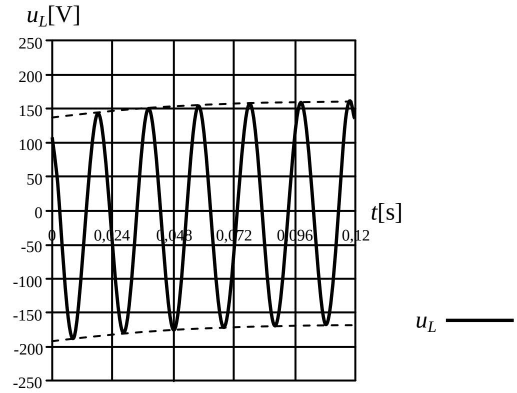
$$\begin{gathered} u_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{d}{dt}\left[\frac{U_m \omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{\frac{-t}{\tau}} + \frac{U_m R}{R^2 + \omega^2 L^2} \sin \omega t - \frac{U_m \omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \cos \omega t\right] = \\ = -\frac{U_m \omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{\frac{-t}{\tau}} + \frac{U_m \omega L R}{R^2 + \omega^2 L^2} \cos \omega t + \frac{U_m \omega^2 L^2}{R^2 + \omega^2 L^2} \sin \omega t \end{gathered} \tag{18.88}$$

Na rys. 18.17, 18.18 oraz 18.19 przedstawiono przebiegi czasowe prądu

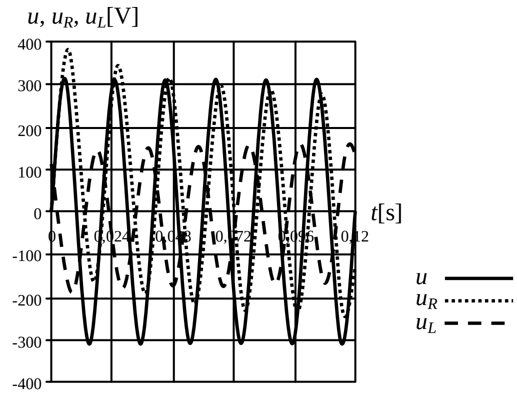


Rys. 18.17. Wykres prądu w funkcji czasu $i = f\left(t\right)$ w obwodzie *RL* zasilanego napięciem sinusoidalnym dla $U = 220$ V, $\varphi = 0$, $f = 50$ Hz, $R = 5\ \Omega$, $L = 10$ mH

w obwodzie $i = f(t)$, napięcia na cewce $u_L = f(t)$, napięcia na rezystorze $u_R = f(t)$, oraz napięcia zasilania $u = f(t)$ dla obwodu *RL* zasilanego napięciem sinusoidalnym dla $U = 220$ V, $\varphi = 0$, $f = 50$ Hz, $R = 5\ \Omega$, $L = 10$ mH.



Rys. 18.18. Wykres napięcia na cewce w funkcji czasu $u_L = f(t)$ w obwodzie *RL* zasilanego napięciem sinusoidalnym dla $U = 220$ V, $\varphi = 0$, $f = 50$ Hz, $R = 5\ \Omega$, $L = 10$ mH



Rys. 18.19. Wykres napięcia na cewce w funkcji czasu $u_L = f(t)$, rezystorze $u_R = f(t)$ oraz napięcia zasilania $u = f(t)$ w obwodzie *RL* zasilanego napięciem sinusoidalnym dla $U = 220$ V, $\varphi = 0$, $f = 50$ Hz, $R = 5\ \Omega$, $L = 10$ mH

Przypadek 2. Przesunięcie fazowe napięcia zasilania $\phi = \pi/2$, czyli napięcie wymuszenia prądu w obwodzie dla $t = 0$ wynosi $U_m \sin(\omega t + \pi/2) = U_m \cos(\omega t) = U_m$.

Napięcie na elementach obwodu możemy opisać II prawem Kirchhoffa, wówczas

$$u_R + u_L = U_m \cos \omega t \tag{18.89}$$

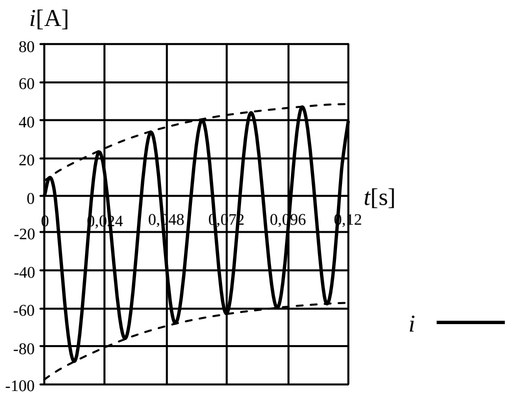
Postępując analogicznie jak w przypadku 1, dochodzimy do następujących wzorów na szukane wielkości chwilowe prądu w obwodzie *i*, napięcia na cewce u_L oraz napięcia na rezystorze u_R

$$i=-\frac{U_m\omega L}{R^2+\omega^2L^2}\cdot\frac{R}{\omega L}e^{\frac{-t}{\tau}}+\frac{U_m\omega L}{R^2+\omega^2L^2}\sin\omega t+$$
$$\frac{U_m\omega L}{R^2+\omega^2L^2}\cdot\frac{R}{\omega L}\cos\omega t \tag{18.90}$$

$$u_R=Ri=-\frac{U_m\omega LR}{R^2+\omega^2L^2}\cdot\frac{R^2}{\omega L}e^{\frac{-t}{\tau}}+\frac{U_m\omega LR}{R^2+\omega^2L^2}\sin\omega t+$$
$$\frac{U_m\omega LR}{R^2+\omega^2L^2}\cdot\frac{R^2}{\omega L}\cos\omega t \tag{18.91}$$

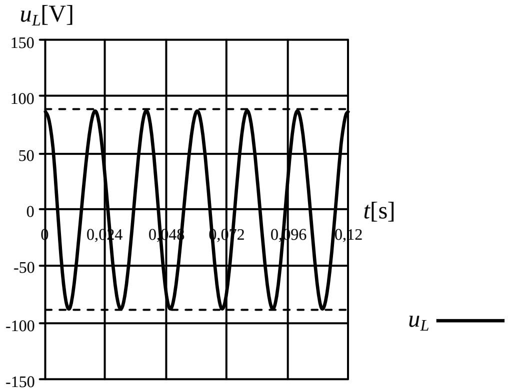
$$u_L=L\frac{di}{dt}=L\frac{d}{dt}\left[-\frac{U_m\omega L}{R^2+\omega^2L^2}\cdot\frac{R}{\omega L}e^{\frac{-t}{\tau}}+\frac{U_m\omega L}{R^2+\omega^2L^2}\sin\omega t+\right.$$
$$\left.\frac{U_m\omega L}{R^2+\omega^2L^2}\cdot\frac{R}{\omega L}\cos\omega t\right]=\frac{U_m\omega L^2}{R^2+\omega^2L^2}\cdot\frac{R^2}{\omega}e^{\frac{-t}{\tau}}+\frac{U_m\omega^2L^2}{R^2+\omega^2L^2}\cos\omega t- \tag{18.92}$$
$$\frac{U_m\omega^2L^2}{R^2+\omega^2L^2}\cdot\frac{R}{\omega}\sin\omega t$$

Na rys. 18.20, 18.21 oraz 18.22 przedstawiono przebiegi czasowe prądu w obwodzie $i=f(t)$, napięcia na cewce $u_L=f(t)$, napięcia na rezystorze $u_R=f(t)$ oraz napięcia zasilania $u=f(t)$ dla obwodu RL zasilanego napięciem sinusoidalnym dla $U=220$ V, $\varphi=\pi/2$, $f=50$ Hz, $R=5\ \Omega$, $L=10$ mH.

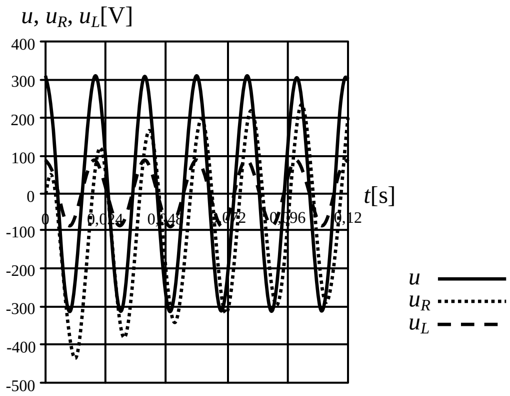


Rys. 18.20. Wykres prądu w funkcji czasu $i=f(t)$ w obwodzie RL zasilanego napięciem sinusoidalnym dla $U=220$ V, $\varphi=\pi/2$, $f=50$ Hz, $R=5\ \Omega$, $L=10$ mH

`



Rys. 18.21. Wykres napięcia na cewce w funkcji czasu $u_L = f(t)$ w obwodzie *RL* zasilanego napięciem sinusoidalnym dla $U = 220$ V, $\varphi = \pi/2$, $f = 50$ Hz, $R = 5\ \Omega$, $L = 10$ mH

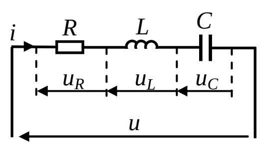


Rys. 18.22. Wykres napięcia na cewce w funkcji czasu $u_L = f(t)$, rezystorze $u_R = f(t)$ oraz napięcia zasilania $u = f(t)$ w obwodzie *RL* zasilanego napięciem sinusoidalnym dla $U = 220$ V, $\varphi = \pi/2$, $f = 50$ Hz, $R = 5\ \Omega$, $L = 10$ mH

18.7. Obwód szeregowy *RLC* zasilany napięciem sinusoidalnym

Rozpatrzmy obwód szeregowy *RLC* rys. 18.23, w którym od chwili $t = 0$ zasilany jest ze źródła napięcia przemiennego

$$u = U_m \sin \omega t \tag{18.93}$$



Rys. 18.23. Obwód szeregowy elementów *R*, *L*, *C*

Napięcie na elementach obwodu możemy opisać II prawem Kirchhoffa

$$u_R + u_L + u_C = U_m \sin \omega t \tag{18.94}$$

Dla

$$u_R = Ri\,,\quad i = C\frac{du_C}{dt} \quad \Rightarrow \quad u_R = RC\frac{du_C}{dt} \tag{18.95}$$

$$u_L = L\frac{di}{dt}\,,\quad i = C\frac{du_C}{dt} \quad \Rightarrow \quad u_L = L\frac{d}{dt}\left(C\frac{du_C}{dt}\right) = LC\frac{d^2u_C}{dt^2} \tag{18.96}$$

otrzymujemy równanie różniczkowe zwyczajne niejednorodne, które opisuje napięcie na kondensatorze

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = u \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_C = \frac{U_m}{LC}\sin\omega t \tag{18.97}$$

Równanie różniczkowe (18.97) rozwiążemy metodą przewidywań.
Równanie charakterystyczne dla równania różniczkowego jednorodnego (18.97) przyjmuje postać

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0 \quad \Rightarrow \quad s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0 \tag{18.98}$$

dla którego stałą tłumienia obwodu α oraz pulsacje drgań własnych ω_0 z fizyki z analogii drgań tłumionych można opisać

$$\alpha = \frac{R}{2L}\,,\quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{18.99}$$

Wyróżnik równania (18.98) wynosi

$$\Delta = \frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC} \tag{18.100}$$

Występują trzy przypadki rozwiązania równania charakterystycznego, mianowicie gdy $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ lub $\Delta < 0$.
Przypadek 1, $\Delta > 0$, warunek ten jest spełniony gdy

$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{18.101}$$

Wówczas stała tłumienia obwodu $\alpha > 1/(LC)$ i w obwodzie dochodzi do drgań aperiodycznych. Równanie charakterystyczne (18.98) posiada dwa różne pierwiastki określone wzorami

$$s_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\,,\quad s_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \tag{18.102}$$

i całka (rozwiązanie) ogólna równania jednorodnego dla równania różniczkowego niejednorodnego (18.97) przyjmuje wówczas postać

$$u_{co} = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \tag{18.103}$$

gdzie A_1, A_2 – dowolne stałe.
Przewidujemy całkę szczególną równania niejednorodnego (18.97) w postaci

$$u_{Cs} = A\sin\omega t + B\cos\omega t \tag{18.104}$$

dla której pierwsza i druga pochodna wynosi

$$\frac{du_{Cs}}{dt} = A\omega\cos\omega t - B\omega\sin\omega t\,,\quad \frac{d^2u_{Cs}}{dt^2} = -A\omega^2\sin\omega t - B\omega^2\cos\omega t \tag{18.105}$$

Podstawiając równania (18.104, 18.105) do (18.97) otrzymujemy

$$\begin{aligned}&\left[\frac{A\left(1-\omega^2LC\right)}{LC} - \frac{R}{L}\omega B\right]\sin\omega t + \left[\frac{B\left(1-\omega^2LC\right)}{LC} + \right.\\ &\left.\frac{R}{L}\omega A\right]\cos\omega t = \frac{U_m}{LC}\sin\omega t\end{aligned} \tag{18.106}$$

Równanie (18.79) jest spełnione gdy zachodzą warunki

$$\frac{A\left(1-\omega^2LC\right)}{LC} - \frac{R}{L}\omega B = \frac{U_m}{LC} \tag{18.107}$$

$$\frac{B\left(1-\omega^2LC\right)}{LC} + \frac{R}{L}\omega A = 0 \tag{18.108}$$

Z układu równań (18.107, 18.108) otrzymujemy stałe A oraz B całki szczególnej (18.104)

$$A = \frac{U_m}{\left(1-\omega^2LC\right) + \omega^2C^2R^2}\,,\quad B = \frac{-U_m\omega CR}{\left(1-\omega^2LC\right)^2 + \omega^2C^2R^2} \tag{18.109}$$

Całka ogólna równania różniczkowego niejednorodnego (18.97) przyjmuje postać

$$u_C = u_{Co} + u_{Cs} = A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t} + A\sin\omega t + B\cos\omega t \tag{18.110}$$

gdzie A oraz B są znane, wzory (18.109).
Korzystając z warunku ciągłości napięcia i prądu na kondensatorze w chwili załączenia obwodu dla $t = 0$ możemy napisać

$$u_C\left(t = {}^{-}0\right) = u_C\left(t = 0\right) = A_1 + A_2 + B = 0 \tag{18.111}$$

$$i\left(t = {}^{-}0\right) = i\left(t = 0\right) = C\frac{du_C\left(t = 0\right)}{dt} = A_1s_1 + A_2s_2 + A\omega = 0 \tag{18.112}$$

gdzie założono, że przed załączeniem dla $t = 0$ kondensator był rozładowany,

$u_C(t = {}^-0) = u_C(t = 0) = 0.$
Z układu równań (18.111, 18.112) otrzymujemy stałe A_1 oraz A_2 całki ogólnej (18.110)

$$A_1 = \frac{A\omega - Bs_2}{s_2 - s_1}, \quad A_2 = \frac{Bs_1 - A\omega}{s_2 - s_1} \tag{18.113}$$

Ostatecznie otrzymujemy wzór na wartość chwilową napięcia na kondensatorze

$$u_C = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + A\sin\omega t + B\cos\omega t \tag{18.114}$$

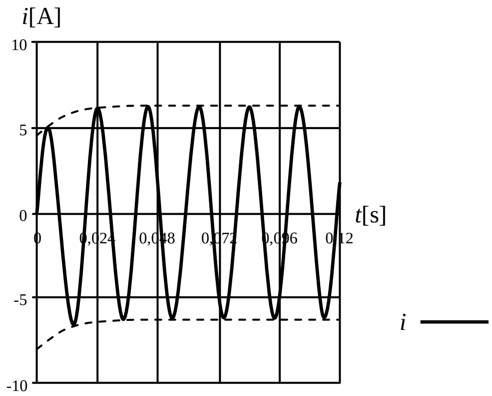
Prąd w obwodzie i napięcie na rezystorze otrzymamy z zależności (18.95) natomiast napięcie na cewce z zależności (18.96)

$$i = C\frac{du_C}{dt} = A_1 s_1 C e^{s_1 t} + A_2 s_2 C e^{s_2 t} + A\omega C\cos\omega t - B\omega C\sin\omega t \tag{18.115}$$

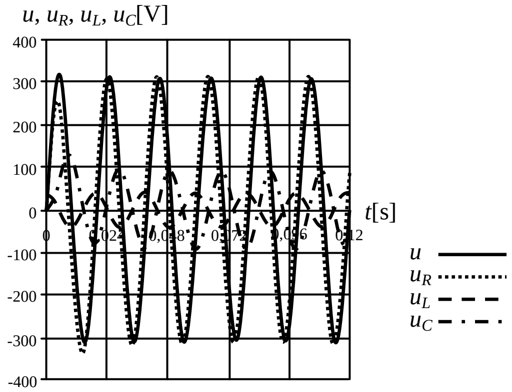
$$u_R = Ri = A_1 s_1 C\,\mathrm{Re}^{s_1 t} + A_2 s_2 C\,\mathrm{Re}^{s_2 t} + A\omega CR\cos\omega t - B\omega CR\sin\omega t \tag{18.116}$$

$$u_L = L\frac{di}{dt} = A_1 s_1^2 LCe^{s_1 t} + A_2 s_2^2 LCe^{s_2 t} - A\omega^2 LC\sin\omega t - B\omega^2 LC\cos\omega t \tag{18.117}$$

Na rys. 18.24 oraz 18.25 przedstawiono przebiegi czasowe prądu w obwodzie $i = f(t)$, napięcia na kondensatorze $u_C = f(t)$, napięcia na cewce $u_L = f(t)$, napięcia na rezystorze $u_R = f(t)$ oraz napięcia zasilania $u = f(t)$ dla obwodu *RLC* zasilanego napięciem sinusoidalnym dla $U = 220$ V, $f = 50$ Hz, $R = 50\ \Omega$, $L = 20$ mH, $C = 220\ \mu$F.



Rys. 18.24. Wykres prądu w funkcji czasu $i = f(t)$ w obwodzie *RLC* zasilanego napięciem sinusoidalnym dla $U = 220$ V, $f = 50$ Hz, $R = 50\ \Omega$, $L = 20$ mH, $C = 220\ \mu$F



Rys. 18.25. Wykres napięcia na kondensatorze $u_C = f(t)$, napięcia na cewce $u_L = f(t)$, napięcia na rezystorze $u_R = f(t)$ oraz napięcia zasilania $u = f(t)$ w obwodzie *RLC* zasilanego napięciem sinusoidalnym dla $U = 220$ V, $f = 50$ Hz, $R = 50\ \Omega$, $L = 20$ mH, $C = 220\ \mu$F

Przypadek 2, $\Delta = 0$, warunek ten jest spełniony gdy

$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{18.118}$$

Wówczas stała tłumienia obwodu $\alpha = 1/(LC)$ i w obwodzie dochodzi do drgań aperiodycznych granicznych.
Równanie charakterystyczne (18.98) posiada jeden pierwiastek podwójny określony wzorem

$$s = -\frac{R}{2L} \tag{18.119}$$

i całka (rozwiązanie) ogólna równania jednorodnego dla równania różniczkowego niejednorodnego (18.97) przyjmuje wówczas postać

$$u_{co} = (A_1 t + A_2)e^{st} \tag{18.120}$$

gdzie A_1, A_2 – dowolne stałe.
Przewidujemy całkę szczególną równania niejednorodnego (18.97) w postaci

$$u_{Cs} = A\sin\omega t + B\cos\omega t \tag{18.121}$$

Całkę tą wyznaczaliśmy w przypadku 1, gdzie stałe *A*, *B* wyrażały się wzorami

$$A = \frac{U_m}{(1-\omega^2 LC) + \omega^2 C^2 R^2}, \quad B = \frac{-U_m \omega CR}{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2} \tag{18.122}$$

Całka ogólna równania różniczkowego niejednorodnego (18.97) przyjmuje postać

$$u_C = u_{Co} + u_{Cs} = (A_1 t + A_2)e^{st} + A\sin\omega t + B\cos\omega t \tag{18.123}$$

gdzie stałe A oraz B dane są wzorami (18.122), nie znane są A_1 oraz A_2.
Korzytając z warunku ciągłości napięcia i prądu na kondensatorze w chwili załącznia obwodu dla $t = 0$ możemy napisać

$$u_C\left(t=^-0\right) = u_C\left(t = 0\right) = A_2 + B = 0 \qquad (18.124)$$

$$i\left(t=^-0\right) = i\left(t = 0\right) = C\,\frac{du_C\left(t = 0\right)}{dt} = A_1 s + A_2 s + A\omega = 0 \qquad (18.125)$$

gdzie założno, że przed załączeniem dla $t = 0$ kondensator był rozładowany, $u_C\left(t=^-0\right) = u_C\left(t = 0\right) = 0$.
Z ukłau równań (18.124, 18.125) otrzymujemy stałe A_1 oraz A_2

$$A_1 = \frac{Bs - A\omega}{s}, \quad A_2 = -B \qquad (18.126)$$

Ostatcznie otrzymujemy wzór na wartość chwilową napięcia na kondensatorze

$$u_C = \left(A_1 t + A_2\right)e^{st} + A\sin\omega t + B\cos\omega t \qquad (18.127)$$

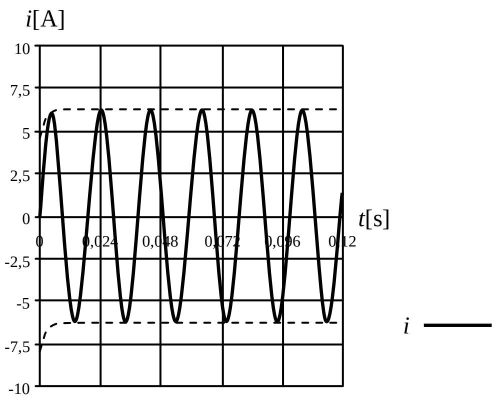
Prąd w obwodzie i napięcie na rezystorze otrzymamy z zależności (18.95) natomiast napięcie na cewce z zależności (18.96)

$$i = C\,\frac{du_C}{dt} = \left(A_1 + A_2\right)sCe^{st} + A\omega C\cos\omega t - B\omega C\sin\omega t \qquad (18.128)$$

$$u_R = Ri = \left(A_1 + A_2\right)sC\,\mathrm{Re}^{st} + A\omega CR\cos\omega t - B\omega CR\sin\omega t \qquad (18.129)$$

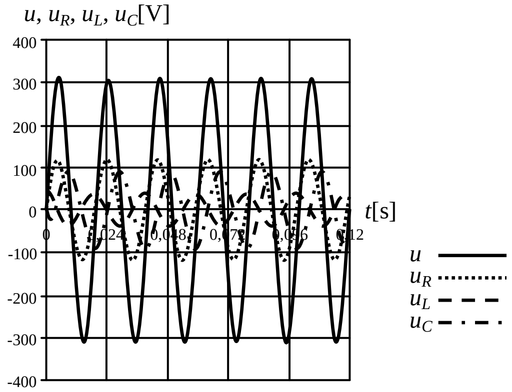
$$u_L = L\,\frac{di}{dt} = \left(A_1 + A_2\right)s^2 CLe^{st} - A\omega^2 LC\sin\omega t - B\omega^2 LC\cos\omega t \qquad (18.130)$$

Na rys. 18.26 oraz 18.27 przedstawiono przebiegi czasowe prądu w obwodzie $i = f(t)$, napięcia na kondensatorze $u_C = f(t)$, napięcia na cewce $u_L = f(t)$, napięcia na rezystorze $u_R = f(t)$ oraz napięcia zasilania $u = f(t)$ dla obwodu RLC



Rys. 18.26. Wykres prądu w funkcji czasu $i = f(t)$ w obwodzie RLC zasilanego napięciem U = 220 V, f = 50 Hz, $R \approx 19\ \Omega$, L = 20 mH, C = 220 μF

zasilanego napięciem sinusoidalnym dla $U = 220$ V, $f = 50$ Hz, $R \approx 19\ \Omega$, $L = 20$ mH, $C = 220\ \mu$F.



Rys. 18.27. Wykres napięcia na kondensatorze $u_C = f(t)$, napięcia na cewce $u_L = f(t)$, napięcia na rezystorze $u_R = f(t)$ oraz napięcia zasilania $u = f(t)$ w obwodzie *RLC* zasilanego napięciem sinusoidalnym dla $U = 220$ V, $f = 50$ Hz, $R \approx 19\ \Omega$, $L = 20$ mH, $C = 220\ \mu$F

Przypadek 3, $\Delta < 0$, warunek ten jest spełniony gdy

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{18.131}$$

Wówczas stała tłumienia obwodu $\alpha < 1/(LC)$ i w obwodzie dochodzi do drgań periodycznych o pulsacji

$$\omega_t = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \tag{18.132}$$

Równanie charakterystyczne (18.98) posiada dwa różne pierwiastki określone wzorami

$$s_1 = -\frac{R}{2L} + \mathrm{j}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}},\ s_2 = -\frac{R}{2L} - \mathrm{j}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \Rightarrow$$
$$s_1 = -\alpha + \mathrm{j}\omega_t,\ s_2 = -\alpha - \mathrm{j}\omega_t \tag{18.133}$$

i całka (rozwiązanie) ogólna równania jednorodnego dla równania różniczkowego niejednorodnego (18.97) przyjmuje postać

$$u_{co} = e^{-\alpha t}\left(A_1 \sin\omega_t t + A_2 \cos\omega_t t\right) \tag{18.134}$$

gdzie A_1, A_2 – dowolne stałe.
Przewidujemy całkę szczególną równania niejednorodnego (18.97) w postaci

$$u_{Cs} = A\sin\omega t + B\cos\omega t \tag{18.135}$$

Całkę tą wyznaczaliśmy w przypadku 1, gdzie stałe A, B wyrażały się wzorami

$$A = \frac{U_m}{\left(1-\omega^2 LC\right)+\omega^2 C^2 R^2}, \quad B = \frac{-U_m \omega CR}{\left(1-\omega^2 LC\right)^2+\omega^2 C^2 R^2} \tag{18.136}$$

Całka ogólna równania różniczkowego niejednorodnego (18.97) przyjmuje postać

$$u_C = u_{Co} + u_{Cs} = e^{-\alpha t}\left(A_1 \sin\omega_t t + A_2 \cos\omega_t t\right) + A\sin\omega t + B\cos\omega t \tag{18.137}$$

gdzie stałe A oraz B dane są wzorami (18.136), nie znane są A_1 oraz A_2.
Korzystając z warunku ciągłości napięcia i prądu na kondensatorze w chwili załączenia obwodu dla $t = 0$ możemy napisać

$$u_C\left(t={}^{-}0\right) = u_C(t=0) = A_2 + B = 0 \tag{18.138}$$

$$i\left(t={}^{-}0\right) = i(t=0) = C\frac{du_C(t=0)}{dt} = -\alpha A_1 \omega_t + A\omega = 0 \tag{18.139}$$

gdzie założono, że przed załączeniem dla $t = 0$ kondensator był rozładowany, $u_C\left(t={}^{-}0\right) = u_C(t=0) = 0$.
Z równań (18.138, 18.139) otrzymujemy stałe A_1 oraz A_2

$$A_1 = \frac{A\omega}{\alpha\omega_t}, \quad A_2 = -B \tag{18.140}$$

Ostatecznie otrzymujemy wzór na wartość chwilową napięcia na kondensatorze

$$u_C = e^{-\alpha t}\left(A_1 \sin\omega_t t + A_2 \cos\omega_t t\right) + A\sin\omega t + B\cos\omega t \tag{18.141}$$

Prąd w obwodzie i napięcie na rezystorze otrzymamy z zależności (18.95) natomiast napięcie na cewce z zależności (18.96)

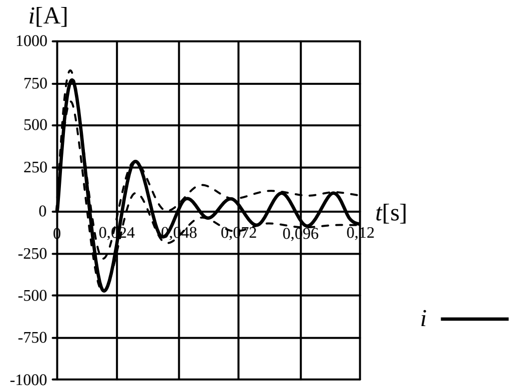
$$\begin{aligned} i = C\frac{du_C}{dt} &= C\omega_t \alpha e^{-\alpha t}\left(A_2 \sin\omega_t t - A_1 \cos\omega_t t\right) + \\ &A\omega C\cos\omega t - B\omega C\sin\omega t \end{aligned} \tag{18.142}$$

$$\begin{aligned} u_R = Ri &= CR\omega_t \alpha e^{-\alpha t}\left(A_2 \sin\omega_t t - A_1 \cos\omega_t t\right) + \\ &A\omega CR\cos\omega t - B\omega CR\sin\omega t \end{aligned} \tag{18.143}$$

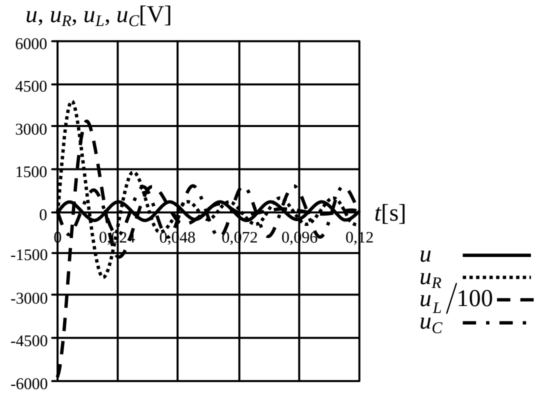
$$\begin{aligned} u_L = L\frac{di}{dt} &= -LC\omega_t^2 \alpha^2 e^{-\alpha t}\left(A_1 \sin\omega_t t + A_2 \cos\omega_t t\right) - \\ &A\omega^2 LC\sin\omega t - B\omega^2 LC\cos\omega t \end{aligned} \tag{18.144}$$

Przykład 1. Zachodzi warunek $\omega = \omega_0$ $\left(\omega_0 = 1/\sqrt{LC}, \omega = 2\pi f\right)$

Dla podanego warunku, na rys. 18.28 oraz 18.29 przedstawiono przebiegi czasowe prądu w obwodzie $i = f(t)$, napięcia na kondensatorze $u_C = f(t)$, napięcia na cewce $u_L = f(t)$, napięcia na rezystorze $u_R = f(t)$ oraz napięcia zasilania $u = f(t)$ dla obwodu *RLC* zasilanego napięciem sinusoidalnym dla $U = 220$ V, $f = 50$ Hz, $f_0 = 39{,}2$ Hz, $R = 5\ \Omega$, $L = 50$ mH, $C = 330\ \mu$F.



Rys. 18.28. Wykres prądu w funkcji czasu $i = f(t)$ w obwodzie *RLC* zasilanego napięciem sinusoidalnym dla $U = 220$ V, $f = 50$ Hz, $f_0 \approx 39{,}2$ Hz, $R = 5\ \Omega$, $L = 50$ mH, $C = 330\ \mu$F

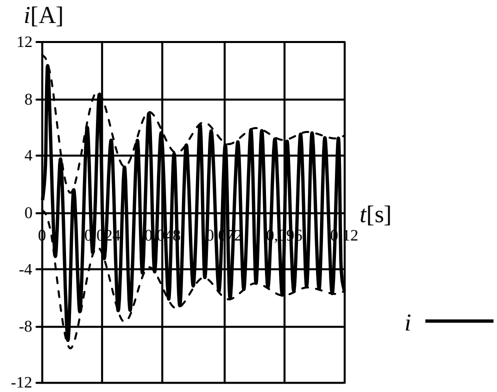


Rys. 18.29. Wykres napięcia na kondensatorze $u_C = f(t)$, napięcia na cewce $u_L/100 = f(t)$, napięcia na rezystorze $u_R = f(t)$ oraz napięcia zasilania $u = f(t)$ w obwodzie *RLC* zasilanego napięciem sinusoidalnym dla $U = 220$ V, $f = 50$ Hz, $f_0 \approx 39{,}2$ Hz, $R = 5\ \Omega$, $L = 50$ mH, $C = 330\ \mu$F

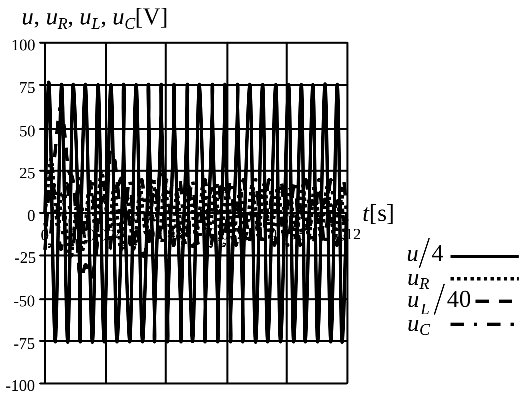
Przykład ten symuluje włączenie do sieci odbiornika jednofazowego rezystancyjno – reaktancyjnego, w którym zachodzi warunek dla parametrów *LC* odbiornika $\omega = \omega_0$. Rys. 18.28 uwidacznia periodyczną składową przejściową prądu, która opisuje zwiększony pobór prądu przez odbiornik w początkowej fazie pracy.

Przykład 2. Zachodzi warunek $\omega >> \omega_0$ $\left(\omega_0 = 1/\sqrt{LC}, \omega = 2\pi f\right)$

Dla podanego warunku, na rys. 18.30 oraz 18.31 przedstawiono przebiegi czasowe prądu w obwodzie $i = f(t)$, napięcia na kondensatorze $u_C = f(t)$, napięcia na cewce $u_L = f(t)$, napięcia na rezystorze $u_R = f(t)$ oraz napięcia zasilania $u = f(t)$ dla obwodu *RLC* zasilanego napięciem sinusoidalnym dla $U = 220$ V, $f = 200$ Hz, $f_0 \approx 48$ Hz, $R = 3\,\Omega$, $L = 50$ mH, $C = 220\,\mu$F.



Rys. 18.30. Wykres prądu w funkcji czasu $i = f(t)$ w obwodzie *RLC* zasilanego napięciem sinusoidalnym dla $U = 220$ V, $f = 220$ Hz, $f_0 \approx 48$ Hz, $R = 3\,\Omega$, $L = 50$ mH, $C = 220\,\mu$F

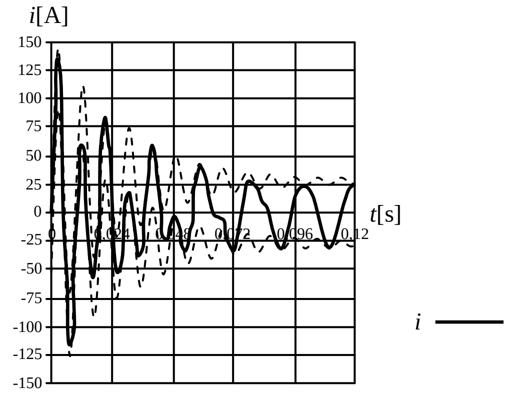


Rys. 18.31. Wykres napięcia na kondensatorze $u_C = f(t)$, napięcia na cewce $u_L/40 = f(t)$, napięcia na rezystorze $u_R = f(t)$ oraz napięcia zasilania $u/4 = f(t)$ w obwodzie *RLC* zasilanego napięciem sinusoidalnym dla $U = 220$ V, $f = 220$ Hz, $f_0 \approx 48$ Hz, $R = 3\,\Omega$, $L = 50$ mH, $C = 220\,\mu$F

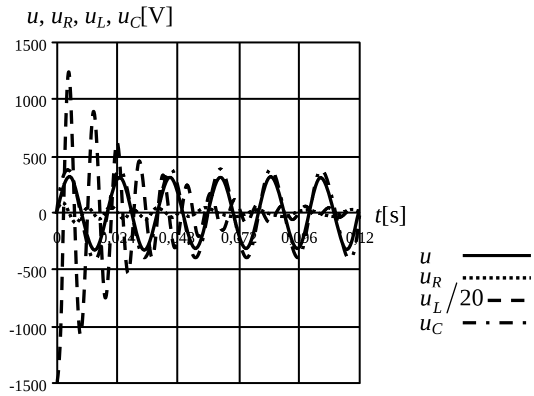
Przykład ten symuluje włączenie do sieci odbiornika jednofazowego rezystancyjno – reaktancyjnego, gdzie zachodzi warunek dla parametrów *LC* odbiornika $\omega >> \omega_0$. Rys. 17.30 uwidacznia periodyczną składową przejściową prądu, która wprowadza dudnienia dla sygnału prądu w początkowej fazie pracy odbiornika.

Przykład 3. Zachodzi warunek $\omega << \omega_0$ $\left(\omega_0 = 1/\sqrt{LC}, \omega = 2\pi f\right)$

Dla podanego warunku na rys. 18.32 oraz 18.33 przedstawiono przebiegi czasowe prądu w obwodzie $i = f(t)$, napięcia na kondensatorze $u_C = f(t)$, napięcia na cewce $u_L = f(t)$, napięcia na rezystorze $u_R = f(t)$ oraz napięcia zasilania $u = f(t)$ dla obwodu *RLC* zasilanego napięciem sinusoidalnym dla $U = 220$ V, $f = 50$ Hz, $f_0 \approx 107$ Hz, $R = 0{,}7\ \Omega$, $L = 10$ mH, $C = 220$ μF.



Rys. 18.32. Wykres prądu w funkcji czasu $i = f(t)$ w obwodzie *RLC* zasilanego napięciem sinusoidalnym dla $U = 220$ V, $f = 50$ Hz, $f_0 \approx 107$ Hz, $R = 0{,}7\ \Omega$, $L = 10$ mH, $C = 220$ μF



Rys. 18.33. Wykres napięcia na kondensatorze $u_C = f(t)$, napięcia na cewce $u_L/20 = f(t)$, napięcia na rezystorze $u_R = f(t)$ oraz napięcia zasilania $u = f(t)$ w obwodzie *RLC* zasilanego napięciem sinusoidalnym dla $U = 220$ V, $f = 50$ Hz, $f_0 \approx 107$ Hz, $R = 0{,}7\ \Omega$, $L = 10$ mH, $C = 220$ μF

Przykład ten symuluje włączenie do sieci odbiornika jednofazowego rezystancyjno – reaktancyjnego, gdzie zachodzi warunek dla parametrów *LC* odbiornika $\omega << \omega_0$. Rys. 18.32 uwidacznia periodyczną składową przejściową prądu, która wprowadza zniekształcenia dla sygnału prądu w początkowej fazie pracy odbiornika.

19. STANY NIEUSTALONE – METODA OPERATOROWA

Stany nieustalone oprócz metody klasycznej, można badać metodą operatorową, która opiera się na jednostronnym przekształceniu funkcji $f(t)$. Funkcja $f(t)$ nazywana orginałem, określona jest dla każdego $t > 0$ i równa jest zeru gdy $t < 0$. Przekształceniem lub transformatą Laplace'a funkcji $f(t)$ nazywamy wyrażenie

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \tag{19.1}$$

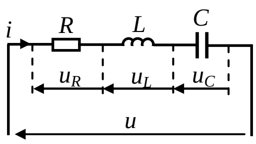
przy czym $s = \sigma + j\omega$ jest zmienną zespoloną.
Funkcje $F(s)$ zmiennej zespolonej s nazywamy transformatą funkcji $f(t)$.
Orginał, tzn. funkcje $f(t)$ odpowiadającą danej transformacie $F(s)$ obliczyć można za pomocą wzoru Riemanna-Mellina (przekształcenie odwrotne)

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(s)e^{st}ds \tag{19.2}$$

przy czym a jest dostatecznie dużą liczbą.

19.1. Prawo Ohma w postaci operatorowej

Rozważmy napięcia chwilowe dla gałęzi szeregowej RLC, rys. 19.1



Rys. 19.1. Obwód szeregowy elementów R, L, C

Napięcie na elementach obwodu możemy opisać II prawem Kirchhoffa

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_{0^+}^{t} i\,dt + u_C(0^+) = u \tag{19.3}$$

Zapisując równanie różniczkowe (19.3) w postaci operatorowej otrzymujemy

$$RI(s) + sLI(s) - Li(0^+) + \frac{I(s)}{sC} + \frac{u_C(0^+)}{s} = U(s) \tag{19.4}$$

gdzie

$$I(s) = \mathcal{L}[i(t)],\ \ U(s) = \mathcal{L}[u(t)] \tag{19.5}$$

Z równania (19.4) otrzymujemy

$$I(s) = \frac{U(s)}{Z(s)} = \frac{\left(\frac{u_C(0^+)}{s}\right) - Li(0^+)}{Z(s)} \tag{19.6}$$

gdzie $Z(s) = R + sL + \frac{1}{sC}$ - impedancja operatorowa.

W przypadku, gdy wartości początkowe prądu w cewce i napięcia na kondensatorze są równe zeru, równanie (19.6) upraszcza się do postaci

$$I(s)=\frac{U(s)}{Z(s)} \tag{19.7}$$

Otrzymaliśmy prawo Ohma w postaci operatorowej.

19.2. I prawo Kirchhoffa w postaci operatorowej

Zgodnie z I prawem Kirchhoffa, suma algebraiczna wartości chwilowych prądów w węźle równa się zeru, czyli

$$\sum_k i_k(t)=0 \tag{19.8}$$

Stosując przekształcenie Laplace'a do równania (19.8) otrzymujemy

$$\sum_k I_k(s)=0 \tag{19.9}$$

Wzór (19.9) przedstawia I prawo Kirchhoffa w postaci operatorowej.

19.3. II prawo Kirchhoffa w postaci operatorowej

Zgodnie z II prawem Kirchhoffa, suma algebraiczna wartości chwilowych spadków napięć w oczku równa się zeru, czyli

$$\sum_k u_k(t)=0 \tag{19.10}$$

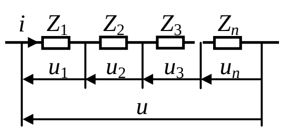
Stosując przekształcenie Laplace'a do równania (19.10) otrzymujemy

$$\sum_k U_k(s)=0 \tag{19.11}$$

Wzór (19.11) przedstawia II prawo Kirchhoffa w postaci operatorowej.

19.4. Impedancja operatorowa

Rozważmy połączenie szeregowe n – impedancji przy zerowych warunkach początkowych rys. 19.2, tzn. w których prądy w cewkach i napęcia na kondenstorach równają się zeru w chwili t = 0, gdy działa zaburzenie powodujące stan nieustlony w obwodzie.



Rys. 19.2. Szeregowe połaczenie n – impedancji

Zgodnie z II prawem Kirchhoffa możemy napisać

$$U_1(s)+U_2(s)+U_3(s)+\ldots+U_n(s)=U(s) \tag{19.12}$$

Oznaczmy $U_1(s)$, $U_2(s)$, $U_3(s)$, $U_n(s)$

$$U_1(s)=I(s)Z_1(s) \tag{19.13}$$

$$U_2(s)=I(s)Z_2(s) \tag{19.14}$$

$$U_3(s)=I(s)Z_3(s) \tag{19.15}$$

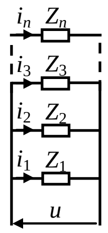
$$U_n(s)=I(s)Z_n(s) \tag{19.16}$$

$$U(s)=I(s)Z_z(s) \tag{19.17}$$

Podstawiając (19.13, 19.14, 19.15, 19.16, 19.17) do równania (19.12) i dzieląc obie strony wyrażenia przez $I(s)$ otrzymujemy

$$Z_z(s)=Z_1(s)+Z_2(s)+Z_3(s)+\ldots+Z_n(s) \tag{19.18}$$

Zależność (19.18) przedstawia wzór na impedancję zastępczą n – połączonych szeregowo impedancji w postaci operatorowej.
Rozważmy połączenie równoległe n – impedancji przy zerowych warunkach początkowych, rys. 19.3.



Rys. 19.3. Równoległe połączenie n - impedancji

Zgodnie z I prawem Kirchhoffa możemy napisać

$$I_1(s)+I_2(s)+I_3(s)+\ldots+I_n(s)=I(s) \tag{19.19}$$

Oznaczmy $I_1(s)$, $I_2(s)$, $I_3(s)$, $I_n(s)$

$$I_1(s)=\frac{U(s)}{Z_1(s)} \tag{19.20}$$

$$I_2(s)=\frac{U(s)}{Z_2(s)} \tag{19.21}$$

$$I_3(s) = \frac{U(s)}{Z_3(s)} \tag{19.22}$$

$$I_n(s) = \frac{U(s)}{Z_n(s)} \tag{19.23}$$

$$I(s) = \frac{U(s)}{Z_z(s)} \tag{19.24}$$

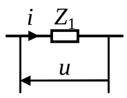
Podstawiając (19.20, 19.21, 19.22, 19.23, 19.24) do równania (19.19) i dzieląc obie strony wyrażenia przez $U(s)$ otrzymujemy

$$\frac{1}{Z_z(s)} = \frac{1}{Z_1(s)} + \frac{1}{Z_2(s)} + \frac{1}{Z_3(s)} + \ldots + \frac{1}{Z_n(s)} \tag{19.25}$$

Zależność (19.25) przedstawia wzór na impedancję zastępczą n – połączonych równolegle impedancji w postaci operatorowej.

19.5. Admitancja operatorowa

Rozważmy dwójnik rys. 19.4



Rys. 19.4. Dwójnik składający się z impedancji Z

Admitancją operatorową $Y(s)$ dwójnika nazywamy odwrotność jego impedancji operatorowej $Z(s)$

$$Y(s) = \frac{1}{Z(s)} \tag{19.26}$$

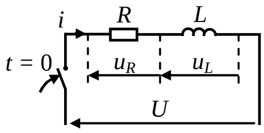
Przy zerowych warunkach początkowych, admitancja operatorowa dwójnika równa się ilorazowi transformaty prądu i transformaty napięcia

$$Y(s) = \frac{I(s)}{U(s)} \tag{19.27}$$

19.6. Przykłady zastosowania metody operatorowej do obliczania obwodów stanów nieustaloych

Przykład 1

Wyznaczyć prąd w gałęzi, napięcie na rezystorze, napięcie na cewce przy szeregowym połączeniu elementów R, L rys. 19.5, po włączeniu napięcia U = 10 V w chwili t = 0. Wartości R = 5 Ω, L = 0,1 mH.



Rys. 19.5. Gałąź szeregowa elementów *RL*, magnesowanie cewki *L*

Z warunku początkowego dla $t = 0^-$ wynika, iż prąd w gałęzi szeregowej nie płynął

$$i(0^-) = i(0) = 0 \tag{19.28}$$

Wobec tego możemy zastosować prawo Ohma w postaci operatorowej przy zerowych warunkach początkowych

$$I(s) = \frac{U(s)}{Z(z)} = \frac{\frac{U}{s}}{R + sL} = \frac{U}{R}\frac{1}{s(1+s\tau)} \tag{19.29}$$

gdzie $\tau = L/R$ – stała czasowa obwodu.
Szukając orginału funkcji (19.29) otrzymujemy prąd w obwodzie

$$i(t) = \frac{U}{R}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(1+s\tau)}\right\} = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \tag{19.30}$$

Transformata napięcia na rezystorze *R* wyraża się wzorem

$$U_R(s) = I(s)R = U\frac{1}{s(1+s\tau)} \tag{19.31}$$

Szukając orginału funkcji (19.31) otrzymujemy napięcie na rezystorze

$$u_R(t) = U\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(1+s\tau)}\right\} = U\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \tag{19.32}$$

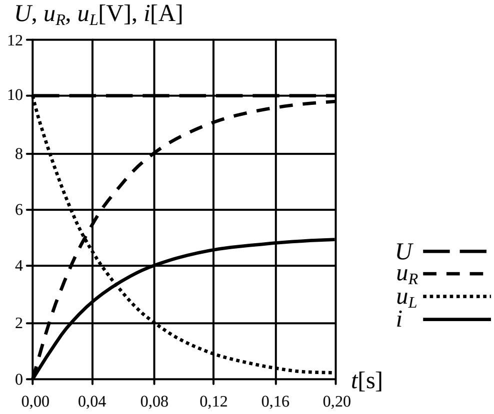
Transformata napięcia na cewce *L* wyraża się wzorem

$$U_L(s) = I(s)sL = \frac{UL}{R}\frac{1}{1+s\tau} \tag{19.33}$$

Szukając orginału funkcji (19.33) otrzymujemy napięcie na cewce

$$u_L(t) = \frac{UL}{R}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{1+s\tau}\right\} = Ue^{-\frac{t}{\tau}} \tag{19.34}$$

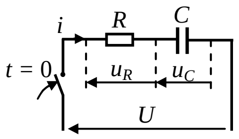
Na rys. 19.6 przedstawiono przebieg prądu, napięcia na rezystorze oraz napięcia na cewce w rozpatrywanym obwodzie.



Rys. 19.6. Przebieg prądu $i = f(t)$, napięcia na rezystorze $u_R = f(t)$ oraz napięcia na cewce $u_L = f(t)$ w rozpatrywanym obwodzie

Przykład 2

Wyznaczyć prąd w gałęzi, napięcie na rezystorze, napięcie na kondensatorze przy szeregowym połączeniu elementów *R*, *C* rys. 19.7, po włączeniu napięcia $U = 20$ V w chwili $t = 0$. Wartości $R = 50\ \Omega$, $C = 1000\ \mu$F.



Rys. 19.7. Gałąź szeregowa elementów *RC*, ładowanie kondensatora *C*

Z warunku początkowego dla $t = 0^-$ wynika, iż kondensator był rozładowany

$$u_C\left(0^-\right) = u_C(0) = 0 \qquad (19.35)$$

Wobec tego możemy zastosować prawo Ohma w postaci operatorowej przy zerowych warunkach początkowych

$$I(s) = \frac{U(s)}{Z(z)} = \frac{\frac{U}{s}}{R + \frac{1}{sC}} = UC\frac{1}{1 + s\tau} \qquad (19.36)$$

gdzie $\tau = RC$ – stała czasowa obwodu.
Szukając oryginału funkcji (19.36) otrzymujemy prąd w obwodzie

$$i(t) = UC\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{1 + s\tau}\right\} = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad (19.37)$$

Transformata napięcia na rezystorze *R* wyraża się wzorem

$$U_R(s) = I(s)R = URC\frac{1}{s(1 + s\tau)} \qquad (19.38)$$

Szukając oryginału funkcji (19.38) otrzymujemy napięcie na rezystorze

$$u_R(t) = URC\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(1+s\tau)}\right\} = Ue^{-\frac{t}{\tau}} \tag{19.39}$$

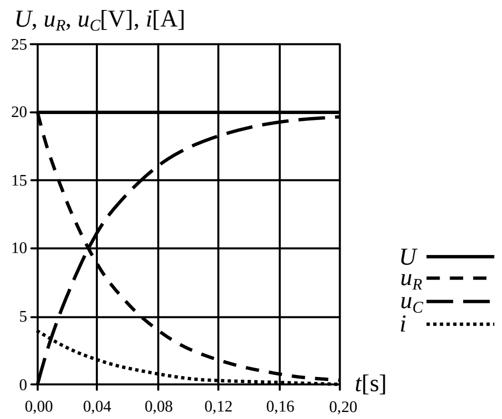
Transformata napięcia na kondensatorze C wyraża się wzorem

$$U_C(s) = I(s)\frac{1}{sC} = U\,\frac{1}{s(1+s\tau)} \tag{19.40}$$

Szukając oryginału funkcji (19.33) otrzymujemy napięcie na cewce

$$u_C(t) = U\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(1+s\tau)}\right\} = U\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \tag{19.41}$$

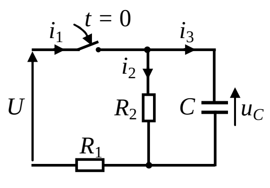
Na rys. 19.8 przedstawiono przebieg prądu, napięcia na rezystorze oraz napięcia na cewce w rozpatrywanym obwodzie.



Rys. 19.8. Przebieg prądu $i = f(t)$, napięcia na rezystorze $u_R = f(t)$ oraz napięcia na kondensatorze $u_C = f(t)$ w rozpatrywanym obwodzie

Przykład 3

Wyznaczyć prądy w obwodzie oraz napięcie na kondensatorze rys. 19.9, po włączeniu napięcia stałego U = 30 V w chwili t = 0. Wartości R_1 = 5 Ω, R_2 = 10 Ω, C = 200 μF.



Rys. 19.9. Schemat rozpatrywanego układu

Zakładamy, że napięcie początkowe na kondensatorze w chwili (t = 0^-) = (t = 0) równa się zeru.
Impedancja zastępcza obwodu wynosi

$$Z_{R_1,R_2,C}(s) = R_1 + \frac{R_2 \frac{1}{sC}}{R_2 + \frac{1}{sC}} = R_1 + \frac{R_2}{1 + sCR_2} \tag{19.42}$$

Transformata napięcia zasilającego wynosi

$$U(s) = \frac{U}{s} \tag{19.43}$$

Stosujemy prawo Ohma w postaci operatorowej przy zerowych warunkach początkowych

$$I_1(s) = \frac{U(s)}{Z_{R_1,R_2,C}(s)} = \frac{U}{R_1 + R_2}\left[\frac{1}{s(1+s\tau)} + \frac{CR_2}{1+s\tau}\right] \tag{19.44}$$

gdzie $\tau = C\dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$ – stała czasowa obwodu.
Wyznaczając transormatę odwrotną do funkcji (19.44) otrzymujemy prąd i_1

$$i_1(t) = \frac{U}{R_1 + R_2}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + \frac{U}{R_1} e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{19.45}$$

Prąd i_2 wyznaczymy z zależności

$$R_2 i_2 = U - R_1 i_1 \quad \Rightarrow \quad i_2 = \frac{1}{R_2}\left(U - R_1 i_1\right) \tag{19.46}$$

Prąd i_3 wyznaczymy z zależności

$$i_3 = i_1 - i_2 \tag{19.47}$$

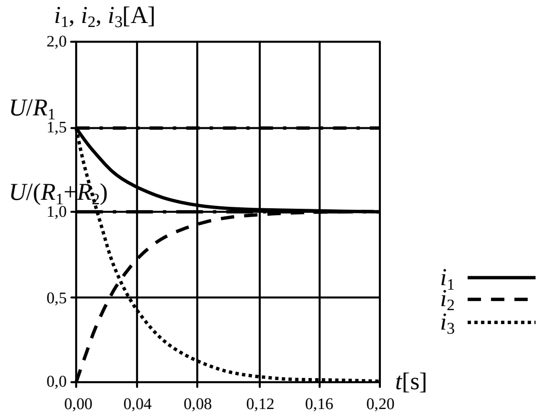
Napięcie na kondensatorze wyrażać będzie się wzorem

$$u_C = R_2 i_2 \tag{19.48}$$

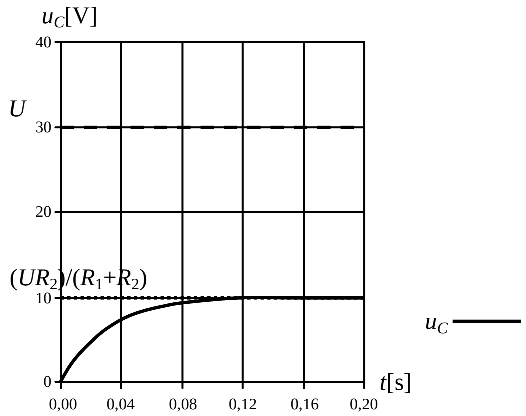
lub

$$u_C = U - R_1 i_1 \tag{19.49}$$

Na rys. 19.10 przedstawiono przebiegi czasowe prądów i_1, i_2, i_3 natomiast na rys. 19.11 przedstawiono przebieg czasowy napięcia na kondensatorze u_C w rozpatrywanym obwodzie.



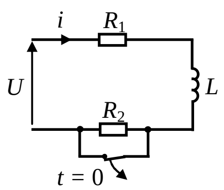
Rys. 19.10. Przebiegi czasowe prądów $i_1 = f(t)$, $i_2 = f(t)$ oraz $i_3 = f(t)$ w rozpatrywanym obwodzie



Rys. 19.11. Przebieg czasowy napięcia na kondensatorze $u_C = f(t)$ w rozpatrywanym obwodzie

Przykład 4

Wyznaczyć przebieg prądu na cewce w układzie przedstawionym na rys. 19.12, jeżeli w chwili t = 0 otworzono wyłącznik. Wartości U = 60 V, R_1 = 5 Ω, R_2 = 10 Ω, L = 0,2 H.



Rys. 19.12. Schemat rozpatrywanego układu

Układamy równanie różniczkowe dla obwodu

$$(R_1 + R_2)i + L\frac{di}{dt} = U \qquad (19.50)$$

Dokonując przekształcenia Laplace’a równania (19.50) otrzymujemy

$$(R_1 + R_2)I(s) + sLI(s) - Li(0^+) = U(s) \tag{19.51}$$

Korzystając z warunku początkowego

$$i(0) = i(0^+) = \frac{U}{R_1} \tag{19.52}$$

otrzymujemy

$$(R_1 + R_2)I(s) + sLI(s) - L\frac{U}{R_1} = \frac{U}{s} \tag{19.53}$$

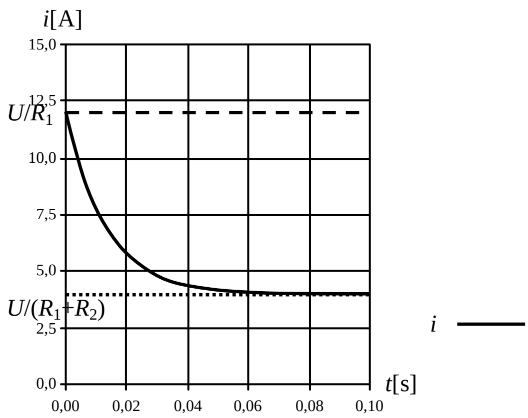
Z równania (19.53) otrzymujemy transformatę prądu *i*

$$I(s) = \frac{U}{R_1 + R_2}\frac{1}{s(1 + s\tau)} + \frac{UL}{R_1(R_1 + R_2)}\frac{1}{1 + s\tau} \tag{19.54}$$

gdzie $\tau = L/(R_1+R_2)$ – stała czasowa obwodu.
Szukając orginału funkcji (19.54) otrzymujemy prąd *i*

$$i(t) = \frac{U}{R_1 + R_2}\left(1 + \frac{R_2}{R_1}e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \tag{19.55}$$

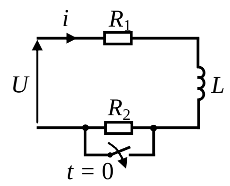
Na rys. 19.13 przedstawino przebieg czasowy prądu na cewce w rozpatrywanym obwodzie.



Rys. 19.13. Przebieg czasowy prądu $i = f(t)$ w rozpatrywanym obwodzie

Przykład 5

Wyznaczyć przebieg prądu na cewce w układzie przedstawionym na rys. 19.14, jeżeli w chwili $t = 0$ zamknięto wyłącznik. Wartości $U = 60$ V, $R_1 = 5\ \Omega$, $R_2 = 5\ \Omega$, $L = 0{,}2$ H.



Rys. 19.14. Schemat rozpatrywanego układu

Układamy równanie różniczkowe dla obwodu

$$R_1 i + L\frac{di}{dt} = U \tag{19.56}$$

Dokonując przekształcenia Laplace'a równania (19.56) otrzymujemy

$$R_1 I(s) + sLI(s) - Li(0^+) = U(s) \tag{19.57}$$

Korzystając z warunku początkowego

$$i(0) = i(0^+) = \frac{U}{(R_1 + R_2)} \tag{19.58}$$

otrzymujemy

$$R_1 I(s) + sLI(s) - L\frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{U}{s} \tag{19.59}$$

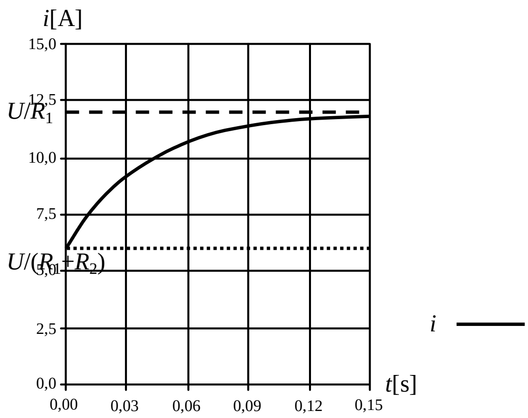
Z równania (19.59) otrzymujemy transformatę prądu i

$$I(s) = \frac{U}{R_1}\frac{1}{s(1 + s\tau)} + \frac{UL}{R_1(R_1 + R_2)}\frac{1}{1 + s\tau} \tag{19.60}$$

gdzie $\tau = L/R_1$ – stała czasowa obwodu.
Szukając orginału funkcji (19.60) otrzymujemy prąd i

$$i(t) = \frac{U}{R_1}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + \frac{U}{R_1 + R_2}e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{19.61}$$

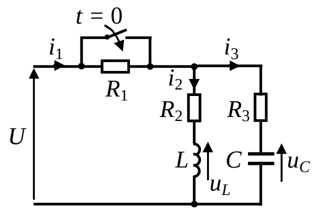
Na rys. 19.15 przedstawino przebieg czasowy prądu na cewce w rozpatrywanym obwodzie.



Rys. 19.15. Przebieg czasowy prądu $i = f(t)$ w rozpatrywanym obwodzie

Przykład 6

Wyznaczyć prądy w obwodzie i_1, i_2, i_3 oraz napięcie na cewce i kondensatorze w obwodzie przedstawionym na rys. 19.16, jeżeli w chwili $t = 0$ zamknięto wyłącznik. Wartości $U = 100$ V, $R_1 = 20$ Ω, $R_2 = 10$ Ω, $R_3 = 10$ Ω, $L = 0{,}1$ H, $C = 2200$ μF.



Rys. 19.16. Schemat rozpatrywanego układu

Z warunków początkowych dla $t = 0^-$, wynika

$$i_2(0^-) = i_2(0) = \frac{U}{R_1 + R_2} \tag{19.62}$$

$$u_C(0^-) = u_C(0) = \frac{UR_2}{R_1 + R_2} \tag{19.63}$$

Układamy równania różniczkowe dla oczek obwodu z II prawa Kirchhoffa

$$R_2 i_2 + L\frac{di_2}{dt} - Li_2(0^+) = U \tag{19.64}$$

$$R_2 i_2 + L\frac{di_2}{dt} - Li_2(0^+) = R_3 i_3 + \frac{1}{C}\int_0^t i_3 dt + u_C(0^+) \tag{19.65}$$

Dokonując przekształcenia Laplace’a równań (19.64), (19.65) otrzymujemy

$$\begin{cases} (R_2 + sL)I_2(s) - Li_2(0^+) = U(s) \\ (R_2 + sL)I_2(s) - Li_2(0^+) = \left(R_3 + \dfrac{1}{sC}\right)I_3(s) + u_C(0^+) \end{cases} \tag{19.66}$$

Podstawiając prawą stronę pierwszego równania do lewej strony równania drugiego, otrzymujemy wzór na transformatę prądu i_3

$$U(s)=\left(R_3+\frac{1}{sC}\right)I_3(s)+u_C\left(0^+\right) \quad \Rightarrow \tag{19.67}$$

$$\frac{U}{s}=\left(R_3+\frac{1}{sC}\right)I_3(s)+\frac{U}{s}\frac{R_2}{R_1+R_2} \quad \Rightarrow \tag{19.68}$$

$$I_3(s)=C\left(U-\frac{UR_2}{R_1+R_2}\right)\frac{1}{1+s\tau_1} \tag{19.69}$$

gdzie $\tau_1 = CR_3$ – pierwsza stała czasowa obwodu.
Szukając oryginału funkcji (19.69) otrzymujemy prąd i_3

$$i_3(t)=\frac{U}{R_3}\left(1-\frac{R_2}{R_1+R_2}\right)e^{-\frac{t}{\tau_1}} \tag{19.70}$$

Z pierwszego równania układu równań (19.66) otrzymujemy transformate prądu i_2

$$I_2(s)=\frac{U(s)+Li_2\left(0^+\right)}{R_2+sL} \quad \Rightarrow \tag{19.67}$$

$$I_2(s)=\frac{\frac{U}{s}+\frac{U}{R_1+R_2}}{R_2+sL} \quad \Rightarrow \tag{19.68}$$

$$I_2(s)=\frac{U}{R_2}\frac{1}{s(1+s\tau_2)}+\frac{L}{R_2}\frac{U}{R_1+R_2}\frac{1}{1+s\tau_2} \tag{19.69}$$

Szukając oryginału funkcji (19.69) otrzymujemy prąd i_2

$$i_2(t)=\frac{U}{R_2}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)+\frac{U}{R_1+R_2}e^{-\frac{t}{\tau_2}} \tag{19.70}$$

Prąd i_1 wyznaczymy z zależności

$$i_1=i_2+i_3 \tag{19.71}$$

Napięcie na kondensatorze wyraża się transformatą

$$U_C(s)=I_3(s)\frac{1}{sC}=U\left(1-\frac{R_2}{R_1+R_2}\right)\frac{1}{s(1+s\tau_1)} \tag{19.72}$$

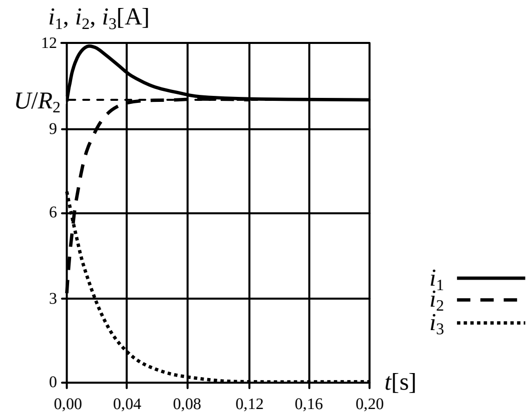
Szukając oryginału funkcji (19.72) oraz uwzględniając warunek początkowy (19.63), otrzymujemy napięcie na kondensatorze u_C

$$u_C(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U_C(s)\} + u_C(0^+) = U\left(1 - \frac{R_2}{R_1+R_2}\right)\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right) + U\frac{R_2}{R_1+R_2} \tag{19.73}$$

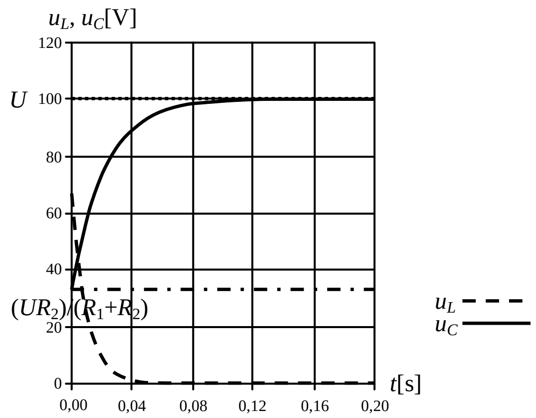
Napięcie na cewce znajdziemy z zależności

$$R_2 i_2 + u_L = R_3 i_3 + u_C \quad \Rightarrow \quad u_L = R_3 i_3 - R_2 i_2 + u_C \tag{19.74}$$

Na rys. 19.17 przedstawiono przebiegi czasowe prądów i_1, i_2, i_3, natomiast na rys. 19.18 przedstawiono przebieg czasowy napięcia na cewce u_L oraz napięcia na kondensatorze u_C w rozpatrywanym obwodzie.



Rys. 19.17. Przebiegi czasowe prądów $i_1 = f(t)$, $i_2 = f(t)$ oraz $i_3 = f(t)$ w rozpatrywanym obwodzie



Rys. 19.18. Przebieg czasowy napięcia na cewce $u_L = f(t)$ oraz napięcia na kondensatorze $u_C = f(t)$ w rozpatrywanym obwodzie

20. FILTRY

Filtry są to układy elektryczne, które charakteryzują się określonymi znanymi parametrami przenoszenia sygnałów. Służą do tłumienia sygnału w określonym paśmie częstotliwości.

Podstawowymi parametrami filtru jest współczynnik tłumienia przenoszonego (filtrowanego) sygnału $\alpha(\omega)$, który wyraża się wzorem

$$\alpha(\omega) = \frac{u_{WY}(\omega)}{u_{WE}(\omega)}, \quad \omega = 2\pi f \tag{20.1}$$

oraz współczynnik przesunięcia fazowego $\beta(\omega)$, który określa przesunięcie fazowe sygnału wyjściowego względem sygnału wejściowego

$$\beta(\omega) = \varphi_{u_{WY}}(\omega) - \varphi_{u_{WE}}(\omega) \tag{20.2}$$

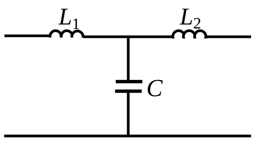
Stromość charakterystyki tłumienia przenoszonego sygnału przez filtr $\alpha = f(\omega)$, określana jest często w decybelach na przedział częstotliwości (na dekadę częstotliwości)

$$K_{\alpha[dB]} = 20 \log \frac{\alpha(\omega_2)}{\alpha(\omega_1)} \tag{20.3}$$

gdzie ω_1 – początek, ω_2 – koniec przedziału (dekady) częstotliwości.

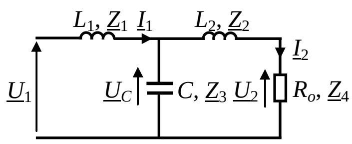
20.1. Filtr dolnoprzepustowy *LC* typu T

Rozpatrzmy filtr dolnoprzepustowy *LC* typu T jak na rys. 20.1.



Rys. 20.1. Filtr dolnoprzepustowy *LC* typu T

Oznaczmy napięcia, prądy oraz impedancję obciążenia, którą stanowi rezystor R_o.



Rys. 20.2. Filtr dolnoprzepustowy *LC* typu T w stanie obciążenia

Obwód rozwiążemy metodą liczb zespolonych, wyznaczając napięcie $\underline{U}_2$ na impedancji obciążenia $\underline{Z}_4$. Będziemy wówczas mogli wyznaczyć charakterystykę tłumienia sygnału przenoszonego przez filtr $\alpha = f(\omega)$ oraz charakterystykę przesunięcia fazowego $\beta = f(\omega)$.

Najpierw oznaczmy impedancje obwodu

$$\underline{Z}_1(\omega) = \mathrm{j}\omega L_1\,, \quad \underline{Z}_2(\omega) = \mathrm{j}\omega L_2\,, \quad \underline{Z}_3(\omega) = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}\,, \quad \underline{Z}_4 = R_o\,, \quad \omega = 2\pi f \qquad (20.4)$$

Wyznaczmy prąd $\underline{I}_1$

$$\underline{I}_1(\omega) = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{1234}(\omega)} \qquad (20.5)$$

gdzie

$$\underline{Z}_{1234}(\omega) = \underline{Z}_1(\omega) + \frac{[\underline{Z}_2(\omega) + \underline{Z}_4]\underline{Z}_3(\omega)}{\underline{Z}_2(\omega) + \underline{Z}_3(\omega) + \underline{Z}_4} \qquad (20.6)$$

Napięcie na kondensatorze C wyrażać będzie się wzorem

$$\underline{U}_C(\omega) = \underline{Z}_{234}(\omega)\underline{I}_1(\omega) \qquad (20.7)$$

gdzie

$$\underline{Z}_{234}(\omega) = \frac{[\underline{Z}_2(\omega) + \underline{Z}_4]\underline{Z}_3(\omega)}{\underline{Z}_2(\omega) + \underline{Z}_3(\omega) + \underline{Z}_4} \qquad (20.8)$$

Prąd $\underline{I}_2$ wyrażać będzie się wzorem

$$\underline{I}_2(\omega) = \frac{\underline{U}_C(\omega)}{\underline{Z}_{24}(\omega)}\,, \quad \underline{Z}_{24}(\omega) = \underline{Z}_2(\omega) + \underline{Z}_4 \qquad (20.9)$$

Ostatecznie otrzymujemy napięcie na impedancji obciążenia filtru $\underline{U}_2$

$$\underline{U}_2(\omega) = \underline{Z}_4\underline{I}_2(\omega) = \underline{Z}_4 \frac{\dfrac{[\underline{Z}_2(\omega) + \underline{Z}_4]\underline{Z}_3(\omega)}{\underline{Z}_2(\omega) + \underline{Z}_3(\omega) + \underline{Z}_4} \cdot \dfrac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1(\omega) + \dfrac{[\underline{Z}_2(\omega) + \underline{Z}_4]\underline{Z}_3(\omega)}{\underline{Z}_2(\omega) + \underline{Z}_3(\omega) + \underline{Z}_4}}}{\underline{Z}_2(\omega) + \underline{Z}_4} \qquad (20.10)$$

Wyznaczamy współczynnik tłumienia sygnału przenoszonego przez filtr $\alpha = f(\omega)$

$$\alpha(\omega) = \frac{|\underline{U}_2(\omega)|}{|\underline{U}_1|} \qquad (20.11)$$

oraz charakterystykę tłumienia w funkcji pulsacji (częstotliwości) $\beta = f(\omega)$

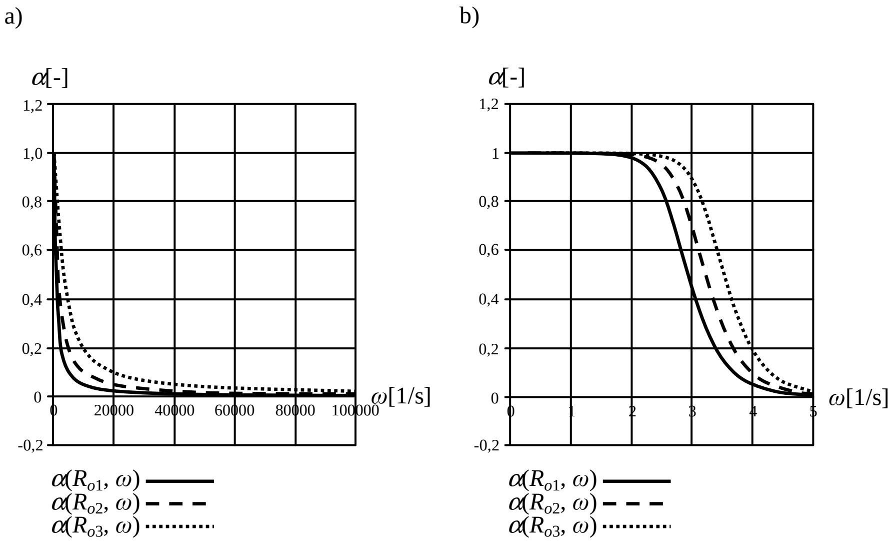
$$\beta(\omega) = \arg[\underline{U}_2(\omega)] - \arg[\underline{U}_1] \qquad (20.12)$$

Ze wzorów (20.4, 20.10, 20.11) wynika, że współczynnik tłumienia sygnału α zależy od pulsacji ω i parametrów układu, elementów reaktancyjnych filtra L_1, L_2 i C oraz impedancji obciążenia, którą w tym przypadku stanowi rezystor R_o. Jeżeli przyjmiemy zadaną wymaganą wartość A spadku amplitudy sygnału na wyjściu filtra, zadany współczynnik tłumienia

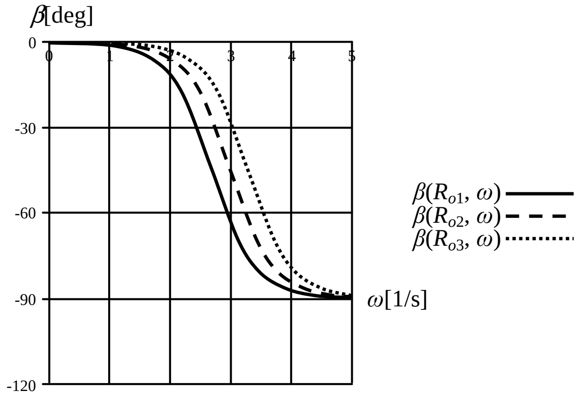
$$\alpha(\omega, L_1, L_2, C, R_o) = A \tag{20.13}$$

to dla wymaganej pulsacji odcięcia (częstotliwości), dla filtru dolnoprzepustowego jest to ω_g i przy przyjętych elementach L_1, L_2, R_o możemy dobrać ze wzoru (20.13) wartość elementu C.

Na rys. 20.3 przedstawiono rodzinę charakterystyk współczynnika tłumienia $\alpha = f(\omega)$, a na rys. 20.4 współczynnika przesunięcia fazowego $\beta = f(\omega)$ filtra dolnoprzepustowego LC typu T o następujących parametrach układu, $L_1 = 1$ μH, $L_2 = 200$ mH, $C = 47$ nF, rezystancji obciążenia $R_{o1} = 100\ \Omega$, $R_{o2} = 200\ \Omega$, $R_{o3} = 400\ \Omega$ i sinusoidalnym napięciu zasilania o wartości skutecznej $U = 24$ V.



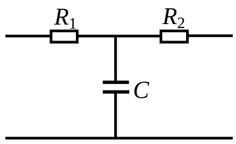
Rys. 20.3. Rodzina charakterystyk współczynnika tłumienia $\alpha = f(\omega)$ filtra dolnoprzepustowego LC typu T o parametrach układu $L_1 = 1$ μH, $L_2 = 200$ mH, $C = 47$ nF dla rezystancji (impedancji) obciążenia $R_{o1} = 100\ \Omega$, $R_{o2} = 200\ \Omega$, $R_{o3} = 400\ \Omega$ i sinusoidalnym napięciu zasilania o wartości skutecznej $U = 24$ V, a) liniowa skala pulsacji, b) logarytmiczna skala pulsacji



Rys. 20.4. Rodzina charakterystyk współczynnika przesunięcia fazowego $\beta = f(\omega)$ filtra dolnoprzepustowego *LC* typu T o parametrach układu $L_1 = 1\ \mu\text{H}$, $L_2 = 200\ \text{mH}$, $C = 47\ \text{nF}$ dla rezystancji (impedancji) obciążenia $R_{o1} = 100\ \Omega$, $R_{o2} = 200\ \Omega$, $R_{o3} = 400\ \Omega$ i sinusoidalnym napięciu zasilania o wartości skutecznej $U = 24\ \text{V}$ (logarytmiczna skala pulsacji)

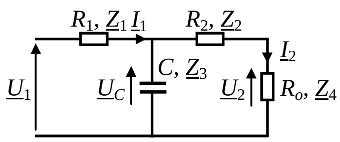
20.2. Filtr dolnoprzepustowy *RC* typu T

Rozpatrzmy filtr dolnoprzepustowy *RC* typu T jak na rys. 20.5.



Rys. 20.5. Filtr dolnoprzepustowy *RC* typu T

Oznaczmy napięcia, prądy oraz impedancję obciążenia, którą stanowi rezystor R_o.



Rys. 20.6. Filtr dolnoprzepustowy *RC* typu T w stanie obciążenia

Obwód rozwiążemy metodą liczb zespolonych. Algorytm postępowania oraz wzory są podobne jak w punkcie 20.1 z tą różnicą, że zmieni się charakter impedancji układu, mianowicie

$$\underline{Z}_1 = R_1,\ \ \underline{Z}_2 = R_2,\ \ \underline{Z}_3(\omega) = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C},\ \ \underline{Z}_4 = R_o,\ \ \omega = 2\pi f \tag{20.14}$$

Postępując jak w punkcie 20.1 otrzymujemy wzory na współczynnik tłumienia przenoszonego sygnału przez filtr α oraz jego charakterystykę w funkcji pulsacji (częstotliwości)

$$\alpha(\omega) = \frac{|\underline{U}_2(\omega)|}{|\underline{U}_1|} \tag{20.15}$$

oraz współczynnik przesunięcia fazowego β przenoszonego sygnału oraz jego charakterystykę w funkcji pulsacji (częstotliwości)

$$\beta(\omega) = \arg[\underline{U}_2(\omega)] - \arg[\underline{U}_1] \tag{20.16}$$

gdzie

$$\underline{U}_2(\omega) = \underline{Z}_4 \underline{I}_2(\omega) = \underline{Z}_4 \frac{\dfrac{[\underline{Z}_2(\omega)+\underline{Z}_4]\underline{Z}_3(\omega)}{\underline{Z}_2(\omega)+\underline{Z}_3(\omega)+\underline{Z}_4} \cdot \dfrac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1(\omega) + \dfrac{[\underline{Z}_2(\omega)+\underline{Z}_4]\underline{Z}_3(\omega)}{\underline{Z}_2(\omega)+\underline{Z}_3(\omega)+\underline{Z}_4}}}{\underline{Z}_2(\omega)+\underline{Z}_4} \tag{20.17}$$

Ze wzorów (20.14, 20.15, 20.17) wynika, że współczynnik tłumienia sygnału α zależy od pulsacji ω i parametrów układu, elementów filtra R_1, R_2 i C oraz impedancji obciążenia, którą w tym przypadku stanowi rezystor R_o. Jeżeli przyjmiemy zadaną wymaganą wartość A spadku amplitudy sygnału na wyjściu filtra, zadany współczynnik tłumienia

$$\alpha(\omega, R_1, R_2, C, R_o) = A \tag{20.18}$$

to dla wymaganej pulsacji odcięcia (częstotliwości), dla filtru dolnoprzepustowego jest to ω_g, i przy przyjętych elementach R_1, R_2, R_o możemy dobrać ze wzoru (20.18) wartość elementu C.
Na rys. 20.7 przedstawiono rodzinę charakterystyk współczynnika tłumienia $\alpha = f(\omega)$, a na rys. 20.8 współczynnika przesunięcia fazowego $\beta = f(\omega)$ filtra dolnoprzepustowego RC typu T o następujących parametrach układu $R_1 = 10\,\Omega$, $R_2 = 100\,\Omega$, $C = 63\mu\text{F}$, rezystancji obciążenia $R_{o1} = 100\,\Omega$, $R_{o2} = 200\,\Omega$, $R_{o3} = 400\,\Omega$ i sinusoidalnym napięciu zasilania o wartości skutecznej $U = 24$ V.

a)