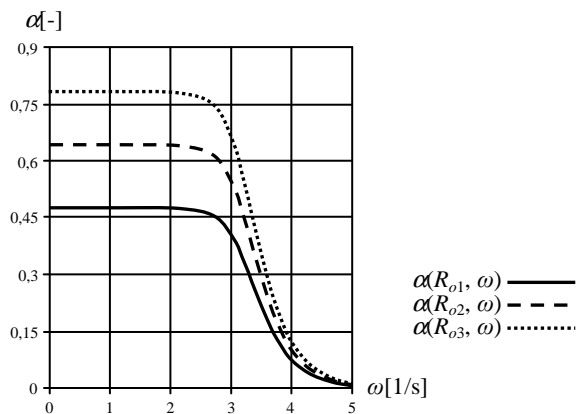
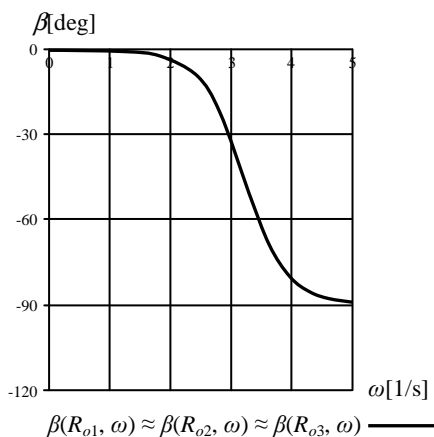


b)



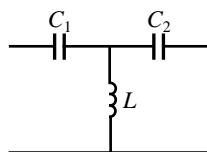
Rys. 20.7. Rodzina charakterystyk współczynnika tłumienia $\alpha = f(\omega)$ filtra dolnoprzepustowego RC typu T o parametrach układu $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 100 \Omega$, $C = 63 \mu\text{F}$ dla rezystancji (impedancji) obciążenia $R_{o1} = 100 \Omega$, $R_{o2} = 200 \Omega$, $R_{o3} = 400 \Omega$ i sinusoidalnym napięciu zasilania o wartości skutecznej $U = 24 \text{ V}$, a) liniowa skala częstotliwości, b) logarytmiczna skala częstotliwości



Rys. 20.8. Rodzina charakterystyk współczynnika przesunięcia fazowego $\beta = f(\omega)$ filtra dolnoprzepustowego RC typu T o parametrach układu $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 100 \Omega$, $C = 63 \mu\text{F}$ dla rezystancji (impedancji) obciążenia $R_{o1} = 100 \Omega$, $R_{o2} = 200 \Omega$, $R_{o3} = 400 \Omega$ i sinusoidalnym napięciu zasilania o wartości skutecznej $U = 24 \text{ V}$ (logarytmiczna skala częstotliwości)

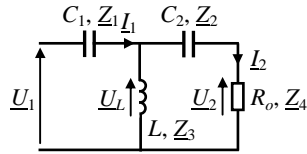
20.3. Filtr górnoprzepustowy LC typu T

Rozpatrzmy filtr górnoprzepustowy LC typu T jak na rys. 20.9.



Rys. 20.9. Filtr górnoprzepustowy LC typu T

Oznaczmy napięcia, prądy oraz impedancję obciążenia, którą stanowi rezystor R_o .



Rys. 20.10. Filtr górnoprzepustowy LC typu T w stanie obciążenia

Obwód rozwiążemy metodą liczb zespolonych. Algorytm postępowania oraz wzory są podobne jak w punkcie 20.1 z tą różnicą, że zmieni się charakter impedancji układu, mianowicie

$$\underline{Z}_1(\omega) = -j\frac{1}{\omega C_1}, \quad \underline{Z}_2(\omega) = -j\frac{1}{\omega C_2}, \quad \underline{Z}_3(\omega) = j\omega L, \quad \underline{Z}_4 = R_o, \quad \omega = 2\pi f \quad (20.19)$$

Postępując jak w punkcie 20.1 otrzymujemy wzory na współczynnik tłumienia sygnału przenieszonego przez filtr α oraz charakterystykę tłumienia w funkcji pulsacji (częstotliwości)

$$\alpha(\omega) = \frac{|\underline{U}_2(\omega)|}{|\underline{U}_1|} \quad (20.20)$$

oraz współczynnik przesunięcia fazowego β przenieszonego sygnału oraz jego charakterystykę w funkcji pulsacji (częstotliwości)

$$\beta(\omega) = \arg[\underline{U}_2(\omega)] - \arg[\underline{U}_1] \quad (20.21)$$

gdzie

$$\underline{U}_2(\omega) = \underline{Z}_4 I_2(\omega) = \underline{Z}_4 \frac{\frac{[\underline{Z}_2(\omega) + \underline{Z}_4] \underline{Z}_3(\omega)}{\underline{Z}_2(\omega) + \underline{Z}_3(\omega) + \underline{Z}_4} \cdot \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1(\omega) + \frac{[\underline{Z}_2(\omega) + \underline{Z}_4] \underline{Z}_3(\omega)}{\underline{Z}_2(\omega) + \underline{Z}_3(\omega) + \underline{Z}_4}}}{\underline{Z}_2(\omega) + \underline{Z}_4} \quad (20.22)$$

Ze wzorów (20.19, 20.20, 20.22) wynika, że współczynnik tłumienia sygnału α zależy od pulsacji ω i parametrów układu, elementów reaktancyjnych filtra C_1 , C_2 i L oraz impedancji obciążenia, którą w tym przypadku stanowi rezystor R_o . Jeżeli przyjmiemy zadaną wymaganą wartość A spadku amplitudy sygnału na wyjściu filtra, zadany współczynnik tłumienia

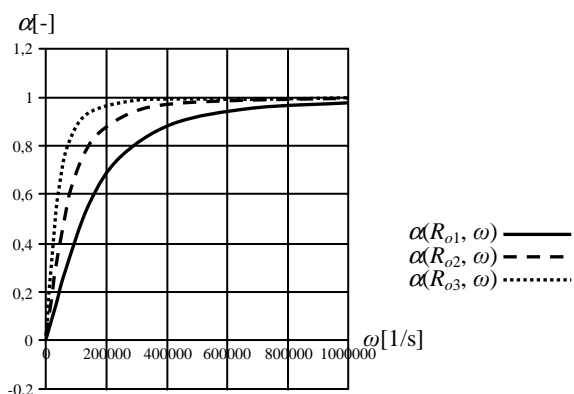
$$\alpha(\omega, C_1, C_2, L, R_o) = A \quad (20.23)$$

to dla wymaganej pulsacji odcięcia (częstotliwości), dla filtra górnoprzepustowego jest to ω_d i przy przyjętych elementach C_1 , C_2 , R_o możemy dobrać ze wzoru (20.23) wartość elementu L .

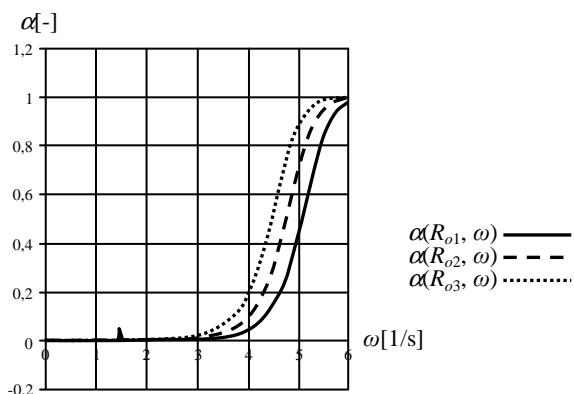
Na rys. 20.11 przedstawiono rodzinę charakterystyk współczynnika tłumienia $\alpha = f(\omega)$, a na rys. 20.12 współczynnika przesunięcia fazowego $\beta = f(\omega)$ filtra

górnoprzepustowego LC typu T o następujących parametrach układu $C_1 = 2200 \mu\text{F}$, $C_2 = 47 \text{ nF}$, $L = 0,5 \text{ H}$, rezystancji obciążenia $R_{o1} = 100 \Omega$, $R_{o2} = 200 \Omega$, $R_{o3} = 400 \Omega$ i sinusoidalnym napięciu zasilania o wartości skutecznej $U = 24 \text{ V}$.

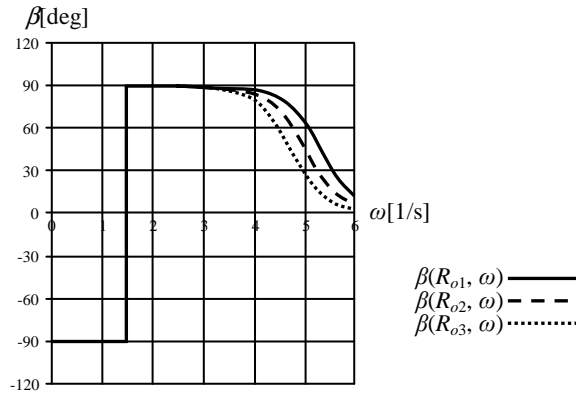
a)



b)



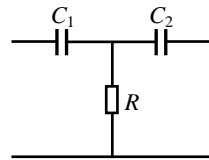
Rys. 20.11. Rodzina charakterystyk współczynnika tłumienia $\alpha = f(\omega)$ filtra górnoprzepustowego LC typu T o parametrach układu $C_1 = 2200 \mu\text{F}$, $C_2 = 47 \text{ nF}$, $L = 0,5 \text{ H}$ dla rezystancji (impedancji) obciążenia $R_{o1} = 100 \Omega$, $R_{o2} = 200 \Omega$, $R_{o3} = 400 \Omega$ i sinusoidalnym napięciu zasilania o wartości skutecznej $U = 24 \text{ V}$, a) liniowa skala częstotliwości, b) logarymiczna skala częstotliwości



Rys. 20.12. Rodzina charakterystyk współczynnika przesunięcia fazowego $\beta = f(\omega)$ filtra górnoprzepustowego LC typu T o parametrach układu $C_1 = 2200 \mu\text{F}$, $C_2 = 47 \text{ nF}$, $L = 0,5 \text{ H}$ dla rezystancji (impedancji) obciążenia $R_{o1} = 100 \Omega$, $R_{o2} = 200 \Omega$, $R_{o3} = 400 \Omega$ i sinusoidalnym napięciu zasilania o wartości skutecznej $U = 24 \text{ V}$ (logarytmiczna skala częstotliwości)

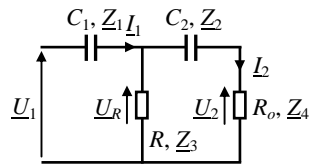
20.4. Filtr górnoprzepustowy RC typu T

Rozpatrzmy filtr górnoprzepustowy RC typu T jak na rys. 20.13.



Rys. 20.13. Filtr górnoprzepustowy RC typu T

Oznaczmy napięcia, prądy oraz impedancję obciążenia, którą stanowi rezystor R_o .



Rys. 20.14. Filtr górnoprzepustowy RC typu T w stanie obciążenia

Obwód rozwiążemy metodą liczb zespolonych. Algorytm postępowania oraz wzory są podobne jak w punkcie 20.1 z tą różnicą, że zmieni się charakter impedancji układu mianowicie

$$\underline{Z}_1(\omega) = -j \frac{1}{\omega C_1}, \quad \underline{Z}_2(\omega) = -j \frac{1}{\omega C_2}, \quad \underline{Z}_3 = R, \quad \underline{Z}_4 = R_o, \quad \omega = 2\pi f \quad (20.24)$$

Postępując jak w punkcie 20.1 otrzymujemy wzory na współczynnik tłumienia sygnału przenieszonego przez filtr α oraz charakterystykę tłumienia w funkcji pulsacji (częstotliwości)

$$\alpha(\omega) = \frac{|U_2(\omega)|}{|U_1|} \quad (20.25)$$

oraz współczynnik przesunięcia fazowego β przenoszonego sygnału oraz jego charakterystykę w funkcji pulsacji (częstotliwości)

$$\beta(\omega) = \arg[U_2(\omega)] - \arg[U_1] \quad (20.26)$$

gdzie

$$\underline{U}_2(\omega) = \underline{Z}_4 \underline{I}_2(\omega) = \underline{Z}_4 \frac{\frac{[\underline{Z}_2(\omega) + \underline{Z}_4] \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2(\omega) + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} \cdot \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1(\omega) + \frac{[\underline{Z}_2(\omega) + \underline{Z}_4] \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2(\omega) + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4}}}{\underline{Z}_2(\omega) + \underline{Z}_4} \quad (20.27)$$

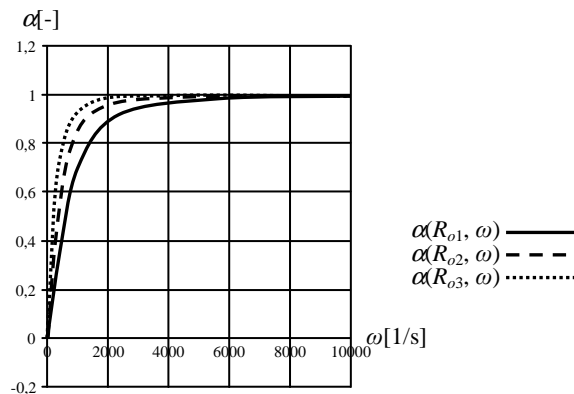
Ze wzorów (20.24, 20.25, 20.27) wynika, że współczynnik tłumienia sygnału α zależy od pulsacji ω i parametrów układu, elementów filtra C_1 , C_2 i R oraz impedancji obciążenia, którą w tym przypadku stanowi rezystor R_o . Jeżeli przyjmiemy zadaną wymaganą wartość A spadku amplitudy sygnału na wyjściu filtra, zadany współczynnik tłumienia

$$\alpha(\omega, C_1, C_2, R, R_o) = A \quad (20.28)$$

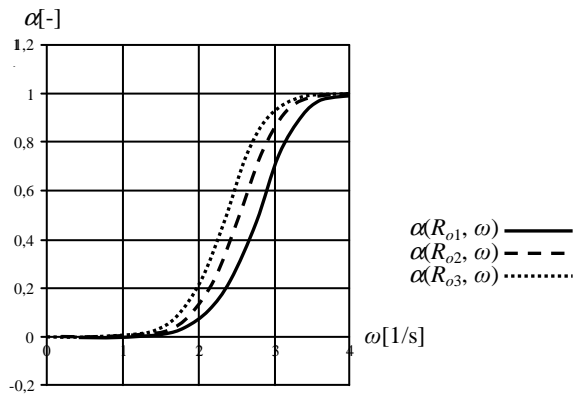
to dla wymaganej pulsacji odcięcia (częstotliwości), dla filtra górnoprzepustowego jest to ω_d , i przy przyjętych elementach C_1 , R , R_o możemy dobrać ze wzoru (20.28) wartość elementu C_2 .

Na rys. 20.15 przedstawiono rodzinę charakterystyk współczynnika tłumienia $\alpha = f(\omega)$, a na rys. 20.16 współczynnika przesunięcia fazowego $\beta = f(\omega)$ filtra górnoprzepustowego RC typu T o następujących parametrach układu $C_1 = 22 \mu\text{F}$, $C_2 = 22 \mu\text{F}$, $R = 200 \Omega$, rezystancji obciążenia $R_{o1} = 100 \Omega$, $R_{o2} = 200 \Omega$, $R_{o3} = 400 \Omega$ i sinusoidalnym napięciu zasilania o wartości skutecznej $U = 24 \text{ V}$.

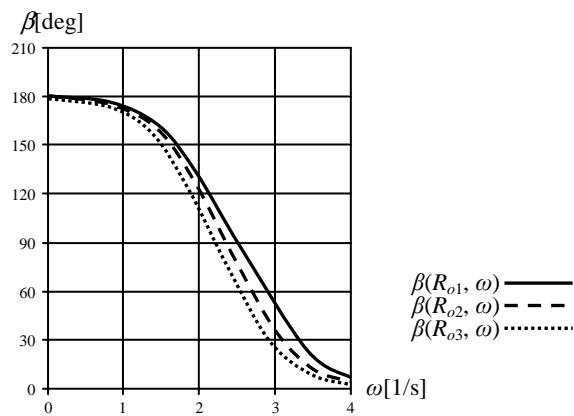
a)



b)



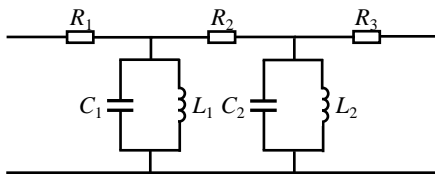
Rys. 20.15. Rodzina charakterystyk współczynnika tłumienia $\alpha = f(\omega)$ filtra górnoprzepustowego RC typu T o parametrach układu $C_1 = 22 \mu\text{F}$, $C_2 = 22 \mu\text{F}$, $R = 200 \Omega$ dla rezystancji (impedancji) obciążenia $R_{o1} = 100 \Omega$, $R_{o2} = 200 \Omega$, $R_{o3} = 400 \Omega$ i sinusoidalnym napięciu zasilania o wartości skutecznej $U = 24 \text{ V}$, a) liniowa skala częstotliwości, b) logarytmiczna skala częstotliwości



Rys. 20.16. Rodzina charakterystyk współczynnika przesunięcia fazowego $\beta = f(\omega)$ filtra górnoprzepustowego RC typu T o parametrach układu $C_1 = 22 \mu\text{F}$, $C_2 = 22 \mu\text{F}$, $R = 200 \Omega$ dla rezystancji (impedancji) obciążenia $R_{o1} = 100 \Omega$, $R_{o2} = 200 \Omega$, $R_{o3} = 400 \Omega$ i sinusoidalnym napięciu zasilania o wartości skutecznej $U = 24 \text{ V}$ (logarytmiczna skala częstotliwości)

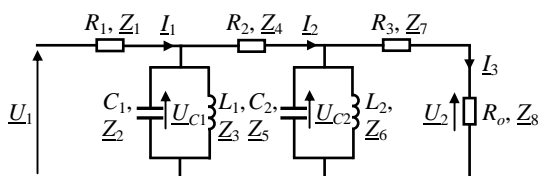
20.5. Filtr pasmowy środkowo-przepustowy

Rozpatrzmy filtr środkowo-przepustowy jak na rys. 20.17.



Rys. 20.17. Filtr pasmowy środkowo-przepustowy

Oznaczmy napięcia, prądy oraz impedancję obciążenia, którą stanowi rezystor R_o .



Rys. 20.18. Filtr pasmowy środkowo-przepustowy w stanie obciążenia

Obwód podobnie jak w poprzednich punktach 20.1 - 20.4, rozwiążemy metodą liczb zespolonych. Oznaczmy impedancje układu, mianowicie

$$\underline{Z}_1(\omega) = R_1 \quad (20.29)$$

$$\underline{Z}_2(\omega) = -j \frac{1}{\omega C_1} \quad (20.30)$$

$$\underline{Z}_3(\omega) = j\omega L_1 \quad (20.31)$$

$$\underline{Z}_4(\omega) = R_2 \quad (20.32)$$

$$\underline{Z}_5(\omega) = -j \frac{1}{\omega C_2} \quad (20.33)$$

$$\underline{Z}_6(\omega) = j\omega L_2 \quad (20.34)$$

$$\underline{Z}_7(\omega) = R_3 \quad (20.35)$$

$$\underline{Z}_8 = R_o \quad (20.36)$$

gdzie $\omega = 2\pi f$.

Wyznaczmy prąd I_1

$$I_1(\omega) = \frac{U_1}{\underline{Z}_{12345678}(\omega)} \quad (20.37)$$

gdzie

$$\underline{Z}_{12345678}(\omega) = \underline{Z}_1(\omega) + \underline{Z}_{2345678}(\omega) \quad (20.38)$$

$$\underline{Z}_{2345678}(\omega) = \frac{\underline{Z}_{23}(\omega)\underline{Z}_{45678}(\omega)}{\underline{Z}_{23}(\omega) + \underline{Z}_{45678}(\omega)} \quad (20.39)$$

$$\underline{Z}_{23}(\omega) = \frac{\underline{Z}_2(\omega)\underline{Z}_3(\omega)}{\underline{Z}_2(\omega) + \underline{Z}_3(\omega)} \quad (20.40)$$

$$\underline{Z}_{45678}(\omega) = \underline{Z}_4(\omega) + \underline{Z}_{5678}(\omega) \quad (20.41)$$

$$\underline{Z}_{5678}(\omega) = \frac{\underline{Z}_{56}(\omega)\underline{Z}_{78}(\omega)}{\underline{Z}_{56}(\omega) + \underline{Z}_{78}(\omega)} \quad (20.42)$$

$$\underline{Z}_{56}(\omega) = \frac{\underline{Z}_5(\omega)\underline{Z}_6(\omega)}{\underline{Z}_5(\omega) + \underline{Z}_6(\omega)} \quad (20.43)$$

$$\underline{Z}_{78}(\omega) = \underline{Z}_7(\omega) + \underline{Z}_8 \quad (20.44)$$

Napięcie na kondensatorze C_1 wyrażać będzie się wzorem

$$\underline{U}_{C1}(\omega) = \underline{Z}_{2345678}(\omega)\underline{I}_1(\omega) \quad (20.45)$$

Prąd \underline{I}_2 wyrażać będzie się wzorem

$$\underline{I}_2(\omega) = \frac{\underline{U}_{C1}(\omega)}{\underline{Z}_{45678}(\omega)} \quad (20.46)$$

Napięcie na kondensatorze C_2 wyrażać będzie się wzorem

$$\underline{U}_{C2}(\omega) = \underline{Z}_{5678}(\omega)\underline{I}_2(\omega) \quad (20.47)$$

Prąd \underline{I}_3 wyrażać będzie się wzorem

$$\underline{I}_3(\omega) = \frac{\underline{U}_{C2}(\omega)}{\underline{Z}_{78}(\omega)} \quad (20.48)$$

Ostatecznie otrzymujemy napięcie na impedancji obciążenia filtra \underline{U}_2

$$\underline{U}_2(\omega) = \underline{Z}_8 \underline{I}_3(\omega) \quad (20.49)$$

Współczynnik tłumienia przeniesionego sygnału przez filtr α w funkcji pulsacji (częstotliwości) wyraża się wzorem

$$\alpha(\omega) = \frac{|\underline{U}_2(\omega)|}{|\underline{U}_1|} \quad (20.50)$$

oraz współczynnik przesunięcia fazowego

$$\beta(\omega) = \arg[\underline{U}_2(\omega)] - \arg[\underline{U}_1] \quad (20.51)$$

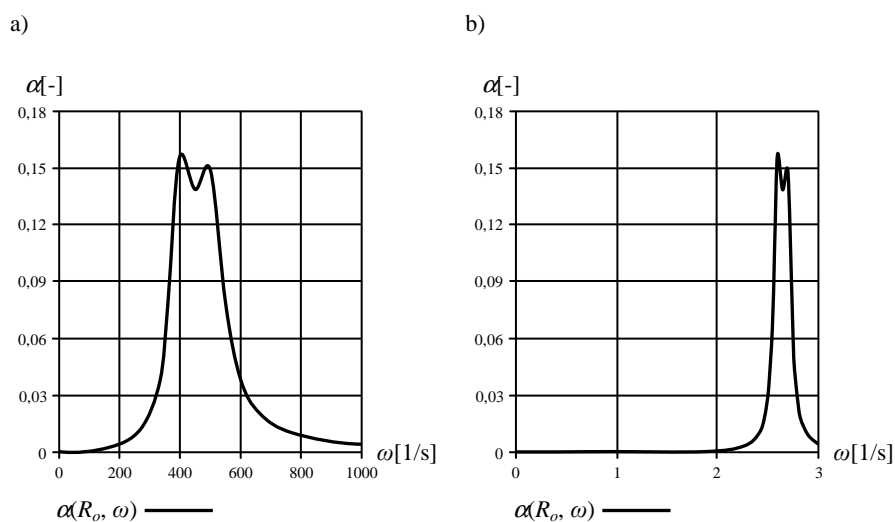
Ze wzorów (20.50, 20.29 - 20.49) wynika, że współczynnik tłumienia sygnału α zależy od pulsacji ω i parametrów układu, elementów filtra $L_1, L_2, C_1, C_2, R_1, R_2, R_3$ oraz impedancji obciążenia, którą w tym przypadku stanowi rezystor R_o

$$\alpha(\omega, L_1, L_2, C_1, C_2, R_1, R_2, R_3, R_o) = A \quad (20.52)$$

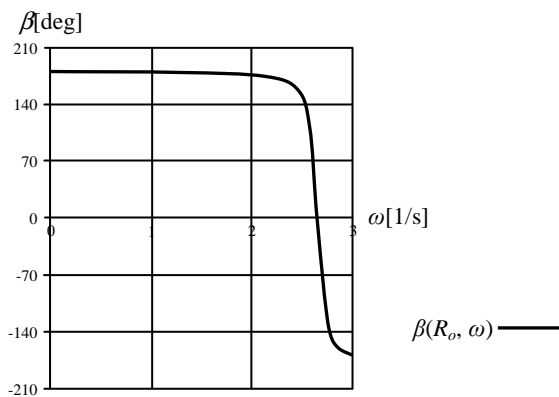
Wobec tego wartość A spadku amplitudy sygnału na wyjściu filtra, zadany współczynnik tłumienia, ustalamy dobierając odpowiednie parametry elementów. Jednocześnie pulsacje przepuszczania ω_d i pulsacje odcięcia ω_g (częstotliwości) dla filtra pasmowego środkowo-przepustowego w tym przypadku wyznaczają częstotliwości rezonansowe obwodów równoległych C_1L_1 i C_2L_2

$$\omega_d = \frac{1}{\sqrt{C_1L_1}}, \quad \omega_g = \frac{1}{\sqrt{C_2L_2}} \quad (20.53)$$

Na rys. 20.19 przedstawiono rodzinę charakterystyk współczynnika tłumienia $\alpha = f(\omega)$, a na rys. 20.20 współczynnika przesunięcia fazowego $\beta = f(\omega)$ filtra pasmowego środkowo-przepustowego o następujących parametrach układu $L_1 = 8 \text{ mH}$, $L_2 = 20 \text{ mH}$, $C_1 = 470 \text{ }\mu\text{F}$, $C_2 = 330 \text{ }\mu\text{F}$, $R_1 = R_2 = R_3 = 50 \text{ }\Omega$, rezystancji obciążenia $R_o = 1 \text{ M}\Omega$ i sinusoidalnym napięciu zasilania o wartości skutecznej $U = 24 \text{ V}$.



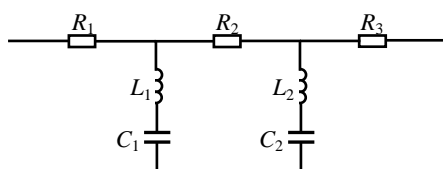
Rys. 20.19. Rodzina charakterystyk współczynnika tłumienia $\alpha = f(\omega)$ filtra pasmowego środkowo-przepustowego o parametrach układu $L_1 = 8 \text{ mH}$, $L_2 = 20 \text{ mH}$, $C_1 = 470 \text{ }\mu\text{F}$, $C_2 = 330 \text{ }\mu\text{F}$, $R_1 = R_2 = R_3 = 50 \text{ }\Omega$, dla rezystancji (impedancji) obciążenia $R_o = 1 \text{ M}\Omega$ i sinusoidalnym napięciu zasilania o wartości skutecznej $U = 24 \text{ V}$, a) liniowa skala częstotliwości, b) logarytmiczna skala częstotliwości



Rys. 20.20. Rodzina charakterystyk współczynnika przesunięcia fazowego $\beta = f(\omega)$ filtra pasmowego środkowo-przepustowego o parametrach układu $L_1 = 8 \text{ mH}$, $L_2 = 20 \text{ mH}$, $C_1 = 470 \text{ }\mu\text{F}$, $C_2 = 330 \text{ }\mu\text{F}$, $R_1 = R_2 = R_3 = 50 \text{ }\Omega$, dla rezystancji (impedancji) obciążenia $R_o = 1 \text{ M}\Omega$ i sinusoidalnym napięciu zasilania o wartości skutecznej $U = 24 \text{ V}$ (logarytmiczna skala częstotliwości)

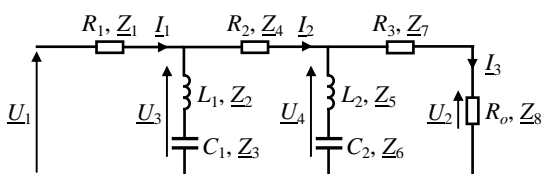
20.6. Filtr pasmowy środkowo-zaworowy

Rozpatrzmy filtr środkowo-zaworowy jak na rys. 20.21.



Rys. 20.21. Filtr pasmowy środkowo-zaworowy

Oznaczmy napięcia, prądy oraz impedancję obciążenia, którą stanowi rezystor R_o .



Rys. 20.22. Filtr pasmowy środkowo-zaworowy w stanie obciążenia

Obwód podobnie jak w poprzednich punktach 20.1 - 20.5, rozwiążemy metodą liczb zespolonych. Oznaczmy impedancje układu, mianowicie

$$\underline{Z}_1(\omega) = R_1 \quad (20.54)$$

$$\underline{Z}_2(\omega) = j\omega L_1 \quad (20.55)$$

$$\underline{Z}_3(\omega) = -j \frac{1}{\omega C_1} \quad (20.56)$$

$$\underline{Z}_4(\omega) = R_2 \quad (20.57)$$

$$\underline{Z}_5(\omega) = j\omega L_2 \quad (20.58)$$

$$\underline{Z}_6(\omega) = -j \frac{1}{\omega C_2} \quad (20.59)$$

$$\underline{Z}_7(\omega) = R_3 \quad (20.60)$$

$$\underline{Z}_8 = R_o \quad (20.61)$$

gdzie $\omega = 2\pi f$.

Wyznaczmy prąd \underline{I}_1

$$\underline{I}_1(\omega) = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{12345678}(\omega)} \quad (20.62)$$

gdzie

$$\underline{Z}_{12345678}(\omega) = \underline{Z}_1(\omega) + \underline{Z}_{2345678}(\omega) \quad (20.63)$$

$$\underline{Z}_{2345678}(\omega) = \frac{\underline{Z}_{23}(\omega)\underline{Z}_{45678}(\omega)}{\underline{Z}_{23}(\omega) + \underline{Z}_{45678}(\omega)} \quad (20.64)$$

$$\underline{Z}_{23}(\omega) = \underline{Z}_2(\omega) + \underline{Z}_3(\omega) \quad (20.65)$$

$$\underline{Z}_{45678}(\omega) = \underline{Z}_4(\omega) + \underline{Z}_{5678}(\omega) \quad (20.66)$$

$$\underline{Z}_{5678}(\omega) = \frac{\underline{Z}_{56}(\omega)\underline{Z}_{78}(\omega)}{\underline{Z}_{56}(\omega) + \underline{Z}_{78}(\omega)} \quad (20.67)$$

$$\underline{Z}_{56}(\omega) = \underline{Z}_5(\omega) + \underline{Z}_6(\omega) \quad (20.68)$$

$$\underline{Z}_{78}(\omega) = \underline{Z}_7(\omega) + \underline{Z}_8 \quad (20.69)$$

Napięcie krańcowe na gałęzi L_1C_1 oznaczone jako \underline{U}_3 wyraża się wzorem

$$\underline{U}_3(\omega) = \underline{Z}_{2345678}(\omega)\underline{I}_1(\omega) \quad (20.70)$$

Prąd \underline{I}_2 wyraża się wzorem

$$\underline{I}_2(\omega) = \frac{\underline{U}_3(\omega)}{\underline{Z}_{45678}(\omega)} \quad (20.71)$$

Napięcie krańcowe na gałęzi L_2C_2 oznaczone jako \underline{U}_4 wyraża się wzorem

$$\underline{U}_4(\omega) = \underline{Z}_{5678}(\omega)\underline{I}_2(\omega) \quad (20.72)$$

Prąd I_3 wyrażać będzie się wzorem

$$I_3(\omega) = \frac{U_4(\omega)}{Z_{78}(\omega)} \quad (20.73)$$

Ostatecznie otrzymujemy napięcie na impedancji obciążenia filtru U_2

$$U_2(\omega) = Z_8 I_3(\omega) \quad (20.74)$$

Współczynnik tłumienia przenieszonego sygnału przez filtr α w funkcji pulsacji (częstotliwości) wyraża się wzorem

$$\alpha(\omega) = \frac{|U_2(\omega)|}{|U_1|} \quad (20.75)$$

oraz współczynnik przesunięcia fazowego

$$\beta(\omega) = \arg[U_2(\omega)] - \arg[U_1] \quad (20.76)$$

Ze wzorów (20.75, 20.54 - 20.74) wynika, że współczynnik tłumienia sygnału α zależy od pulsacji ω i parametrów układu, elementów filtra $L_1, L_2, C_1, C_2, R_1, R_2, R_3$ oraz impedancji obciążenia, którą w tym przypadku stanowi rezystor R_o

$$\alpha(\omega, L_1, L_2, C_1, C_2, R_1, R_2, R_3, R_o) = A \quad (20.77)$$

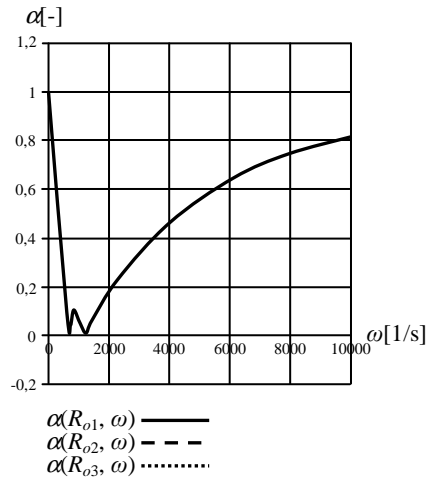
Wobec tego wartość A spadku amplitudy sygnału na wyjściu filtra, zadany współczynnik tłumienia, ustalamy dobierając odpowiednie parametry elementów. Jednocześnie zakres zaporowy filtra pasmowego środkowo-zaporowego stanowią dwie pulsacje rezonansowe obwodów szeregowych $L_1 C_1$ i $L_2 C_2$

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{C_1 L_1}}, \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{C_2 L_2}} \quad (20.78)$$

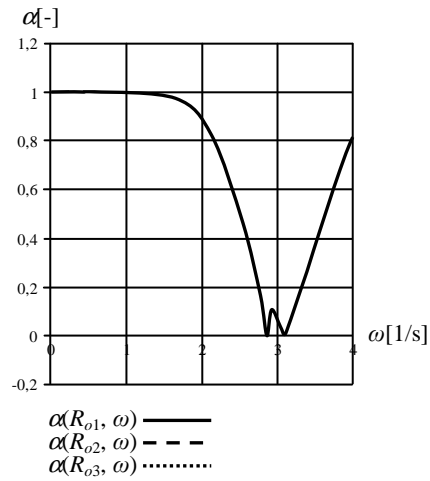
przy czym $\omega_1 < \omega_2$.

Na rys. 20.23 przedstawiono rodzinę charakterystyk współczynnika tłumienia $\alpha = f(\omega)$, a na rys. 20.24 współczynnika przesunięcia fazowego $\beta = f(\omega)$ filtra pasmowego środkowo-zaporowego o następujących parametrach układu $L_1 = 20 \text{ mH}$, $L_2 = 3 \text{ mH}$, $C_1 = 100 \text{ }\mu\text{F}$, $C_2 = 220 \text{ }\mu\text{F}$, $R_1 = R_2 = R_3 = 10 \text{ }\Omega$, rezystancji obciążenia $R_o = 1 \text{ M}\Omega$ i sinusoidalnym napięciu zasilania o wartości skutecznej $U = 24 \text{ V}$.

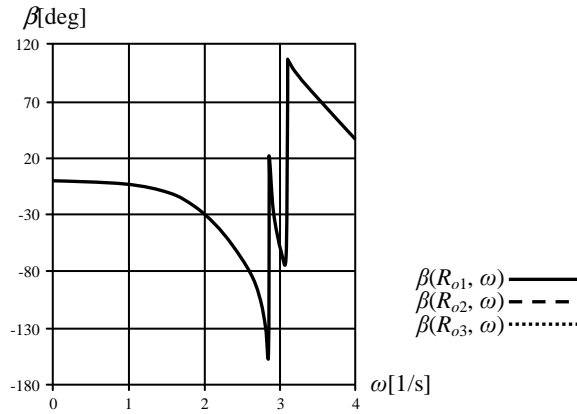
a)



b)



Rys. 20.23. Rodzina charakterystyk współczynnika tłumienia $\alpha = f(\omega)$ filtra pasmowego środkowo-zaworowego o parametrach układu $L_1 = 20$ mH, $L_2 = 3$ mH, $C_1 = 100$ μ F, $C_2 = 220$ μ F, $R_1 = R_2 = R_3 = 10$ Ω , dla rezystancji (impedancji) obciążenia $R_o = 1$ M Ω i sinusoidalnym napięciu zasilania o wartości skutecznej $U = 24$ V, a) liniowa skala częstotliwości, b) logarymiczna skala częstotliwości



Rys. 20.24. Rodzina charakterystyk współczynnika przesunięcia fazowego $\beta = f(\omega)$ filtra pasmowego środkowo-zaworowego o parametrach układu $L_1 = 20$ mH, $L_2 = 3$ mH, $C_1 = 100$ μ F, $C_2 = 220$ μ F, $R_1 = R_2 = R_3 = 10$ Ω dla rezystancji (impedancji) obciążenia $R_o = 1$ M Ω i sinusoidalnym napięciu zasilania o wartości skutecznej $U = 24$ V (logarymiczna skala częstotliwości)

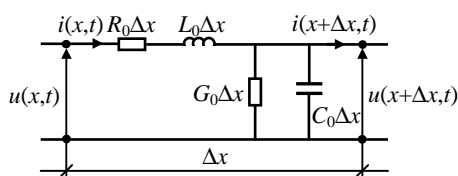
21. LINIA DŁUGA

Linia długa jest to linia, w której długość fali przesyłanych sygnałów napięcia i prądu jest mniejsza od długości samej linii (potocznie mówiąc długości przewodu).

Jeżeli długość fali przesyłanych sygnałów jest mniejsza od długości linii, dochodzi do zjawisk falowych w linii, ruchu falowego sygnału w linii oraz odbicia fali na końcu linii od odbiornika.

Jeżeli przyjmiemy, że linia ma charakter rzeczywisty, posiada rezystancję i indukcyjność podłużną oraz pojemność i konduktancję poprzeczną, to w linii długiej dochodzi do tłumienia amplitudy sygnału oraz przesunięcia fazowego napięcia na końcu linii względem napięcia na początku linii. Wynika to z pasywnego charakteru linii, występowania elementów rezystancyjnych R i reaktancyjnych LC .

Napięcia i prądy w linii długiej w odróżnieniu od zwykłych obwodów skupionych RLC bada się w funkcji odległości od początku lub końca linii, gdzie wielkości RLC są rozłożone.



Rys. 21.1. Schemat zastępczy linii długiej

Dla odcinka linii długiej, dla granicy $\Delta x \rightarrow 0$, można wyznaczyć wzory różniczkowe napięcia i prądu w linii

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t} \quad (21.1)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 i + C_0 \frac{\partial u}{\partial t} \quad (21.2)$$

gdzie R_0 jest to rezystancja jednostkowa określana do jednostki długości, najczęściej na 1 km długości, L_0 , G_0 , C_0 – indukcyjność, konduktancja i pojemność jednostkowa linii określana analogicznie.

Przy odpowiednich przekształceniach, możemy otrzymać równania napięcia i prądu w dowolnej odległości x od początku linii dla wartości skutecznych, sinusoidalnym przebiegu przenoszonych sygnałów i impedancji obciążenia równej impedancji falowej linii długiej Z_f

$$\underline{U} = \underline{U}_1 \cosh \underline{\gamma} x - \underline{Z}_f \underline{I}_1 \sinh \underline{\gamma} x \quad (21.3)$$

$$\underline{I} = -\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_f} \sinh \underline{\gamma} x + \underline{I}_1 \cosh \underline{\gamma} x \quad (21.4)$$

We wzorach (21.3, 21.4) γ – oznacza stałą propagacji linii długiej, która wyraża się wzorem

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} \quad (21.5)$$

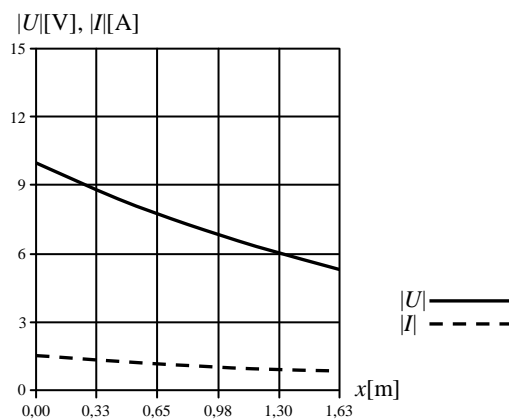
Stałą propagacji przedstawia się również w postaci

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta \quad (21.6)$$

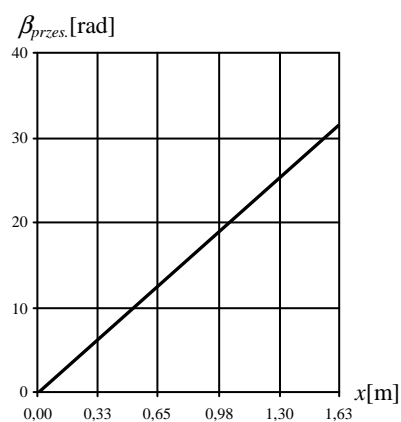
gdzie α – nazywana jest stałą tłumienia sygnału i odpowiada za jego tłumienie, natomiast β – nazywana jest stałą fazową i odpowiada za przesunięcie fazowe. \underline{Z}_f – określa impedancję falową linii długiej, która wyraża się wzorem

$$\underline{Z}_f = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} \quad (21.7)$$

Jednostką impedancji falowej jest $[\Omega]$.



Rys. 21.2. Wykres zmian napięcia $|U| = f(x)$ i prądu $|I| = f(x)$ w linii długiej obciążonej impedancją falową \underline{Z}_f dla $U_1 = 10\text{V}$, $R_0 = 5\ \Omega/\text{m}$, $L_0 = 2\ \text{mH}/\text{m}$, $G_0 = 1\ \text{mS}/\text{m}$, $C_0 = 47\ \mu\text{F}/\text{m}$, $f = 10\ \text{kHz}$



Rys. 21.3. Wykres przesunięcia fazowego $\beta_{przes.} = f(x)$ dla napięcia i prądu w linii długiej obciążonej impedancją falową \underline{Z}_f dla $U_1 = 10\ \text{V}$, $R_0 = 5\ \Omega/\text{m}$, $L_0 = 2\ \text{mH}/\text{m}$, $G_0 = 1\ \text{mS}/\text{m}$, $C_0 = 47\ \mu\text{F}/\text{m}$, $f = 10\ \text{kHz}$

Ze wzorów (21.3, 21.4) otrzymujemy zależności na napięcie i prąd na końcu linii, podstawiając do wzorów $x = l$

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_1 \cosh \underline{\gamma} l - \underline{Z}_f \underline{I}_1 \sinh \underline{\gamma} l \quad (21.8)$$

$$\underline{I}_2 = -\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_f} \sinh \underline{\gamma} l + \underline{I}_1 \cosh \underline{\gamma} l \quad (21.9)$$

Również ze wzorów (21.3, 21.4) możemy otrzymać wyrażenie na napięcie i prąd w zależności od napięcia i prądu na końcu linii

$$\underline{U} = \underline{U}_2 \cosh \underline{\gamma} x' + \underline{Z}_f \underline{I}_2 \sinh \underline{\gamma} x' \quad (21.10)$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_f} \sinh \underline{\gamma} x' + \underline{I}_2 \cosh \underline{\gamma} x' \quad (21.11)$$

gdzie $x' = l - x$, oraz

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \cosh \underline{\gamma} l + \underline{Z}_f \underline{I}_2 \sinh \underline{\gamma} l \quad (21.12)$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_f} \sinh \underline{\gamma} l + \underline{I}_2 \cosh \underline{\gamma} l \quad (21.13)$$

dla $x' = l$.

Ze wzorów (21.12, 21.13) można wyznaczyć impedancję wejściową linii długiej, dzieląc równanie napięcia przez równanie prądu

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{U}_2 \cosh \underline{\gamma} l + \underline{Z}_f \underline{I}_2 \sinh \underline{\gamma} l}{\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_f} \sinh \underline{\gamma} l + \underline{I}_2 \cosh \underline{\gamma} l} = \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_f \tanh \underline{\gamma} l}{1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_f} \tanh \underline{\gamma} l} \quad (21.14)$$

gdzie $\underline{Z}_2 = \underline{U}_2 / \underline{I}_2$ jest impedancją obciążenia linii długiej.

Wyróżniamy trzy szczególne przypadki obciążenia linii długiej, między innymi obciążenie linii długiej impedancją falową $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_f$, wówczas wzór (21.14) przyjmuje postać

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_f \quad (21.15)$$

stan jałowy $\underline{Z}_2 = \infty$, wówczas \underline{Z}_1 wynosi

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_f \operatorname{ctanh} \underline{\gamma} l \quad (21.16)$$

oraz stan zwarcia $\underline{Z}_2 = 0$, wówczas \underline{Z}_1 wynosi

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_f \tanh \underline{\gamma} l \quad (21.17)$$

Przy znanym napięciu zasilania linii długiej i znanej impedancji wejściowej (21.14, 21.15, 21.16, 21.17), możemy określić prąd na wejściu linii

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} \quad (21.18)$$

We wzorach (21.3, 21.4) podstawiając

$$\cosh \underline{\gamma}x = \frac{e^{\underline{\gamma}x} + e^{-\underline{\gamma}x}}{2}, \quad \sinh \underline{\gamma}x = \frac{e^{\underline{\gamma}x} - e^{-\underline{\gamma}x}}{2} \quad (21.19)$$

oraz następnie grupując czynniki według rosnącego $e^{\underline{\gamma}x}$ oraz malejącego $e^{-\underline{\gamma}x}$ otrzymujemy

$$\underline{U} = \frac{e^{\underline{\gamma}x}}{2}(\underline{U}_1 - \underline{Z}_f \underline{I}_1) + \frac{e^{-\underline{\gamma}x}}{2}(\underline{U}_1 + \underline{Z}_f \underline{I}_1) \quad (21.20)$$

$$\underline{I} = \frac{e^{\underline{\gamma}x}}{2}\left(\underline{I}_1 - \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_f}\right) + \frac{e^{-\underline{\gamma}x}}{2}\left(\underline{I}_1 + \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_f}\right) \quad (21.21)$$

Wiedząc, że

$$e^{\underline{\gamma}x} = e^{(\alpha+j\beta)x} = e^{\alpha x} e^{j\beta x}, \quad e^{-\underline{\gamma}x} = e^{-(\alpha+j\beta)x} = e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} \quad (21.22)$$

oraz przechodząc na wartości chwilowe napięcia i prądu stosując podstawienie

$$u = \text{Im}(\underline{U}\sqrt{2}e^{j\omega t}) \quad (21.23)$$

$$i = \text{Im}(\underline{I}\sqrt{2}e^{j\omega t}) \quad (21.24)$$

ostatecznie otrzymujemy wzory na chwilowe wartości napięcia i prądu

$$u = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x)(\underline{U}_1 - \underline{Z}_f \underline{I}_1) + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x)(\underline{U}_1 + \underline{Z}_f \underline{I}_1) \quad (21.25)$$

$$i = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x)\left(\underline{I}_1 - \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_f}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x)\left(\underline{I}_1 + \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_f}\right) \quad (21.26)$$

We wzorach (21.25, 21.26) można wyróżnić czynnik fali rosnącej u_{II} , i_{II} (odbitej) oraz czynnik fali malejącej u_I , i_I (padającej)

$$u_{II} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x)(\underline{U}_1 - \underline{Z}_f \underline{I}_1) \quad (21.27)$$

$$u_I = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x)(\underline{U}_1 + \underline{Z}_f \underline{I}_1) \quad (21.28)$$

$$i_{II} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x) \left(I_1 - \frac{U_1}{Z_f} \right) \quad (21.29)$$

$$i_I = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x) \left(I_1 + \frac{U_1}{Z_f} \right) \quad (21.30)$$

Stosując podobne przekształcenia do wzorów (21.10, 21.11) otrzymujemy wzory składników fali rosnącej u_{II} , i_{II} (odbitej) oraz fali malejącej u_I , i_I (padającej) w zależności od napięcia i prądu na końcu linii

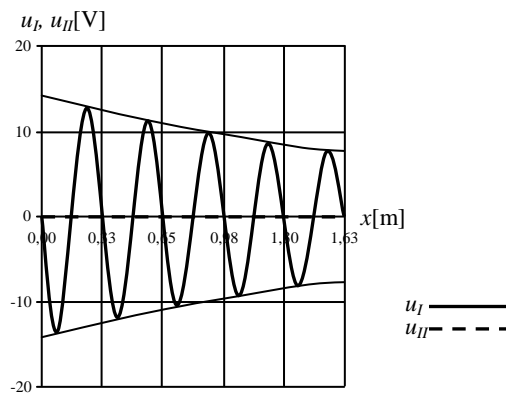
$$u_{II} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\alpha x'} \sin(\omega t + \beta x') (U_2 + Z_f I_2) \quad (21.31)$$

$$u_I = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\alpha x'} \sin(\omega t - \beta x') (U_2 - Z_f I_2) \quad (21.32)$$

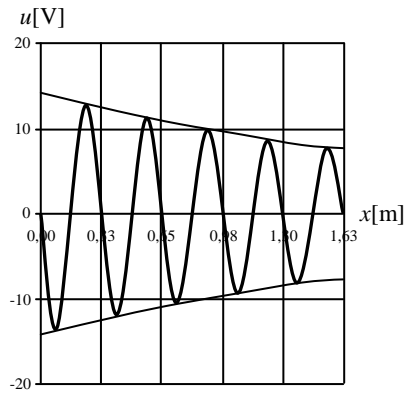
$$i_{II} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\alpha x'} \sin(\omega t + \beta x') \left(I_2 + \frac{U_2}{Z_f} \right) \quad (21.33)$$

$$i_I = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\alpha x'} \sin(\omega t - \beta x') \left(I_2 - \frac{U_2}{Z_f} \right) \quad (21.34)$$

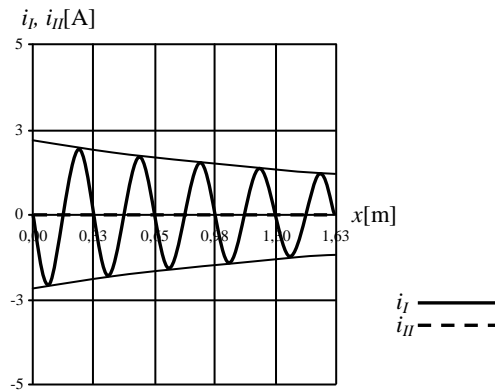
gdzie $x' = l - x$.



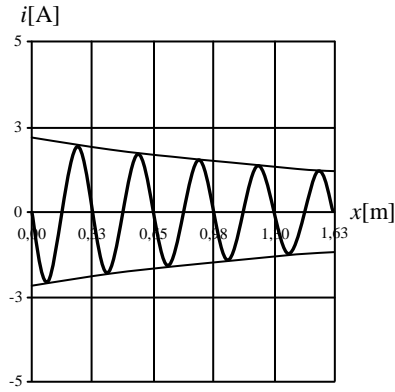
Rys. 21.4. Wykres fali padającej i fali odbitej napięcia $u_I = f(t, x)$ $u_{II} = f(t, x)$ w linii długiej obciążonej impedancją falową Z_f dla $U_1 = 10$ V, $R_0 = 5 \Omega/m$, $L_0 = 2$ mH/m, $G_0 = 1$ mS/m, $C_0 = 47 \mu\text{F}/m$, $f = 10$ kHz i czasu $t = 0$



Rys. 21.5. Wypadkowa fali padającej i fali odbitej napięcia $u = f(t, x)$ w linii długiej obciążonej impedancją falową Z_f dla $\underline{U}_1 = 10$ V, $R_0 = 5 \Omega/\text{m}$, $L_0 = 2 \text{ mH}/\text{m}$, $G_0 = 1 \text{ mS}/\text{m}$, $C_0 = 47 \mu\text{F}/\text{m}$, $f = 10 \text{ kHz}$ i czasu $t = 0$



Rys. 21.6. Wykres fali padającej i fali odbitej prądu $i_l = f(t, x)$ $i_n = f(t, x)$ w linii długiej obciążonej impedancją falową Z_f dla $\underline{U}_1 = 10$ V, $R_0 = 5 \Omega/\text{m}$, $L_0 = 2 \text{ mH}/\text{m}$, $G_0 = 1 \text{ mS}/\text{m}$, $C_0 = 47 \mu\text{F}/\text{m}$, $f = 10 \text{ kHz}$ i czasu $t = 0$



Rys. 21.7. Wypadkowa fali padającej i fali odbitej prądu $i = f(t, x)$ w linii długiej obciążonej impedancją falową Z_f dla $\underline{U}_1 = 10 \text{ V}$, $R_0 = 5 \Omega/\text{m}$, $L_0 = 2 \text{ mH}/\text{m}$, $G_0 = 1 \text{ mS}/\text{m}$, $C_0 = 47 \mu\text{F}/\text{m}$, $f = 10 \text{ kHz}$ i czasu $t = 0$

Dla linii długiej wprowadza się współczynnik odbicia fali dla napięcia i prądu na końcu linii dla $x = l$ definiowany w następujący sposób

$$n_u = \frac{u_{II}}{u_I}, \quad n_i = \frac{i_{II}}{i_I} \quad (21.35)$$

Podstawiając (21.31, 21.32, 21.33, 21.34) do (21.35) dla $x' = 0$ otrzymujemy współczynniki odbicia fali napięcia i fali prądu

$$n_u = \frac{Z_2 + Z_f}{Z_2 - Z_f}, \quad n_i = -\frac{Z_2 + Z_f}{Z_2 - Z_f} \quad (21.36)$$

Prędkość rozchodzenia się fali w linii długiej w stanie ustalonym dla $(\omega t + \beta x) = \text{const.}$ otrzymujemy różniczkując drogę kątową po czasie

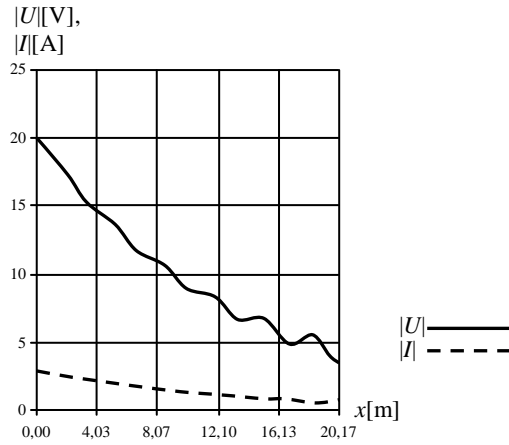
$$\frac{d}{dt}(\omega t + \beta x) = \text{const.} \Rightarrow \omega + \beta \frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = v = \frac{\omega}{\beta} \quad (21.37)$$

Długość rozchodzonej fali określa zależność

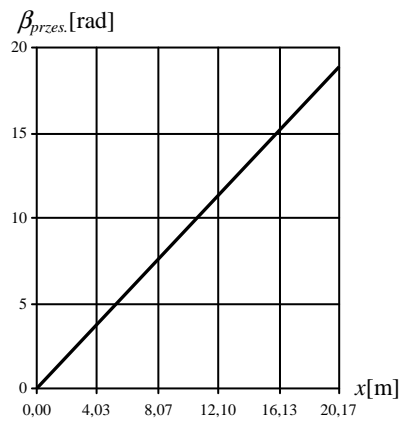
$$\lambda = vT = \frac{2\pi}{\beta} \quad (21.38)$$

Przykład dodatkowy 1

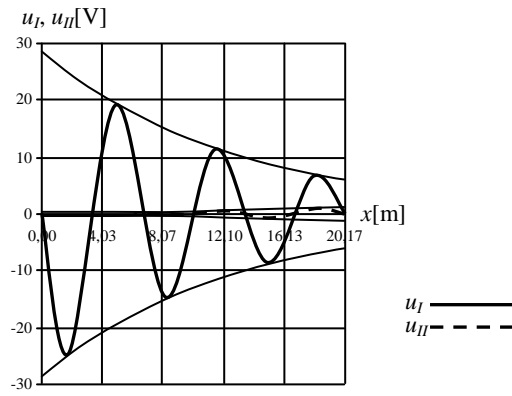
Na rys. 21.8 i 21.9 przedstawiono zmiany napięcia $|U| = f(x)$ i prądu $|I| = f(x)$ oraz zmiany kąta przesunięcia fazowego napięcia i prądu $\beta_{\text{przes.}} = f(x)$, natomiast na rys. 21.10, 21.11, 21.12, 21.13 przebiegi fal padających i odbitych napięcia i prądu $u_I = f(t, x)$, $u_{II} = f(t, x)$, $u = f(t, x)$, $i_I = f(t, x)$, $i_{II} = f(t, x)$, $i = f(t, x)$ w linii długiej obciążonej impedancją $Z_2 = (4,75 - j0,5) \Omega$ dla $\underline{U}_1 = 20 \text{ V}$, $R_0 = 1 \Omega/\text{m}$, $L_0 = 1 \text{ mH}/\text{m}$, $G_0 = 1 \text{ mS}/\text{m}$, $C_0 = 22 \mu\text{F}/\text{m}$, $f = 1 \text{ kHz}$ i czasu $t = 0$.



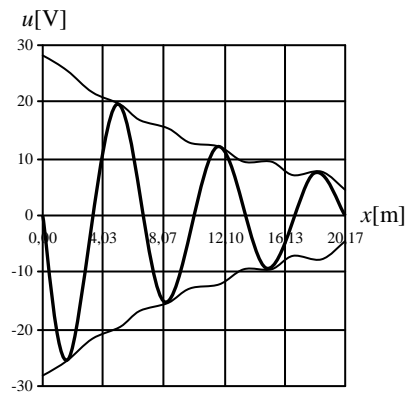
Rys. 21.8. Wykres zmian napięcia $|U| = f(x)$ i prądu $|I| = f(x)$ w linii długiej obciążonej impedancją $Z_2 = (4,75 - j0,5) \Omega$ dla $U_1 = 20 \text{ V}$, $R_0 = 1 \Omega/\text{m}$, $L_0 = 1 \text{ mH}/\text{m}$, $G_0 = 1 \text{ mS}/\text{m}$, $C_0 = 22 \mu\text{F}/\text{m}$, $f = 1 \text{ kHz}$



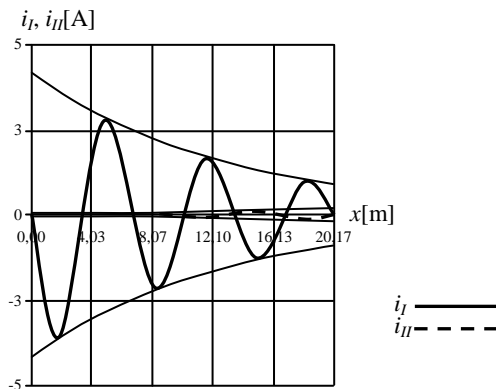
Rys. 21.9. Wykres przesunięcia fazowego $\beta_{przes.} = f(x)$ dla napięcia i prądu w linii długiej obciążonej impedancją $Z_2 = (4,75 - j0,5) \Omega$ dla $U_1 = 20 \text{ V}$, $R_0 = 1 \Omega/\text{m}$, $L_0 = 1 \text{ mH}/\text{m}$, $G_0 = 1 \text{ mS}/\text{m}$, $C_0 = 22 \mu\text{F}/\text{m}$, $f = 1 \text{ kHz}$



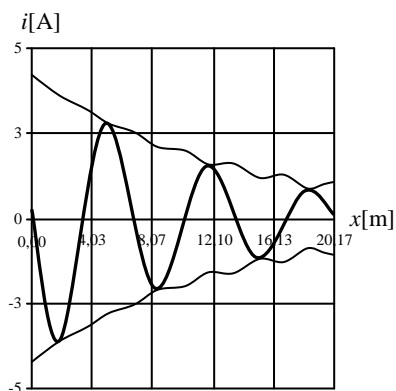
Rys. 21.10. Wykres fali padającej i fali odbitej napięcia $u_I = f(t, x)$, $u_{II} = f(t, x)$ w linii długiej obciążonej impedancją $Z_2 = (4,75 - j0,5) \Omega$ dla $U_1 = 20 \text{ V}$, $R_0 = 1 \Omega/\text{m}$, $L_0 = 1 \text{ mH}/\text{m}$, $G_0 = 1 \text{ mS}/\text{m}$, $C_0 = 22 \mu\text{F}/\text{m}$, $f = 1 \text{ kHz}$ i czasu $t = 0$



Rys. 21.11. Wypadkowa fali padającej i fali odbitej napięcia $u = f(t, x)$ w linii długiej obciążonej impedancją $Z_2 = (4,75 - j0,5) \Omega$ dla $U_1 = 20 \text{ V}$, $R_0 = 1 \Omega/\text{m}$, $L_0 = 1 \text{ mH}/\text{m}$, $G_0 = 1 \text{ mS}/\text{m}$, $C_0 = 22 \mu\text{F}/\text{m}$, $f = 1 \text{ kHz}$ i czasu $t = 0$



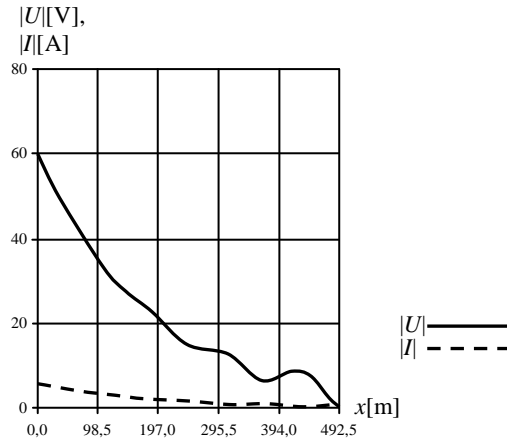
Rys. 21.12. Wykres fali padającej i fali odbitej prądu $i_I = f(t, x)$, $i_{II} = f(t, x)$ w linii długiej obciążonej impedancją $Z_2 = (4,75 - j0,5) \Omega$ dla $U_1 = 20 \text{ V}$, $R_0 = 1 \Omega/\text{m}$, $L_0 = 1 \text{ mH}/\text{m}$, $G_0 = 1 \text{ mS}/\text{m}$, $C_0 = 22 \mu\text{F}/\text{m}$, $f = 1 \text{ kHz}$ i czasu $t = 0$



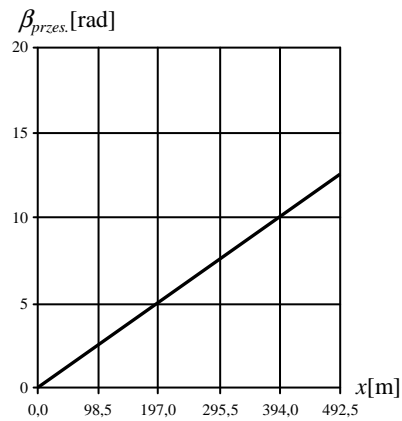
Rys. 21.13. Wypadkowa fali padającej i fali odbitej prądu $i = f(t, x)$ w linii długiej obciążonej impedancją $Z_2 = (4,75 - j0,5) \Omega$ dla $U_1 = 20 \text{ V}$, $R_0 = 1 \Omega/\text{m}$, $L_0 = 1 \text{ mH}/\text{m}$, $G_0 = 1 \text{ mS}/\text{m}$, $C_0 = 22 \mu\text{F}/\text{m}$, $f = 1 \text{ kHz}$ i czasu $t = 0$

Przykład dodatkowy 2

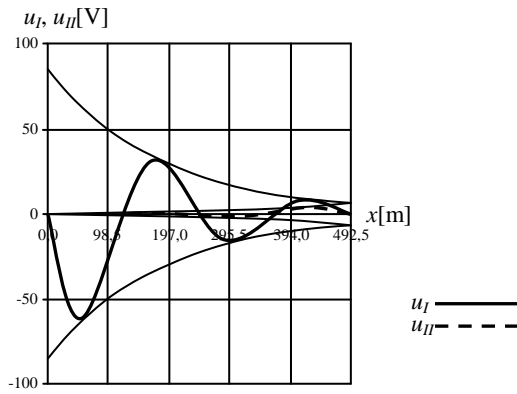
Na rys. 21.14 i 21.15 przedstawiono zmiany napięcia $|U| = f(x)$ i prądu $|I| = f(x)$ oraz zmiany kąta przesunięcia fazowego napięcia i prądu $\beta_{przes.} = f(x)$, natomiast na rys. 21.16, 21.17, 21.18, 21.19 przebiegi fal padających i odbitych napięcia i prądu $u_I = f(t, x)$, $u_{II} = f(t, x)$, $u = f(t, x)$, $i_I = f(t, x)$, $i_{II} = f(t, x)$, $i = f(t, x)$ w linii długiej obciążonej impedancją $Z_2 = (0,2 - j1) \Omega$ dla $U_1 = 60 \text{ V}$, $R_0 = 0,1 \Omega/\text{m}$, $L_0 = 0,1 \text{ mH}/\text{m}$, $G_0 = 0,1 \text{ mS}/\text{m}$, $C_0 = 1 \mu\text{F}/\text{m}$, $f = 400 \text{ Hz}$ i czasu $t = 0$.



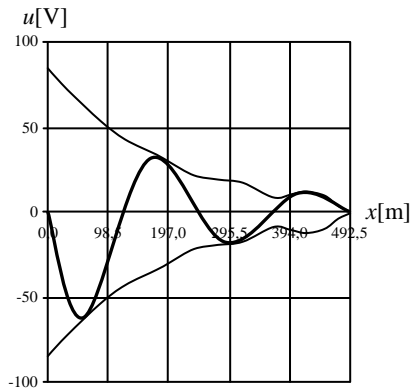
Rys. 21.14. Wykres zmian napięcia $|\underline{U}| = f(x)$ i prądu $|\underline{I}| = f(x)$ w linii długiej obciążonej impedancją $\underline{Z}_2 = (0,2 - j1) \Omega$ dla $\underline{U}_1 = 60 \text{ V}$, $R_0 = 0,1 \Omega/\text{m}$, $G_0 = 0,1 \text{ mS}/\text{m}$, $C_0 = 1 \mu\text{F}/\text{m}$, $f = 400 \text{ Hz}$



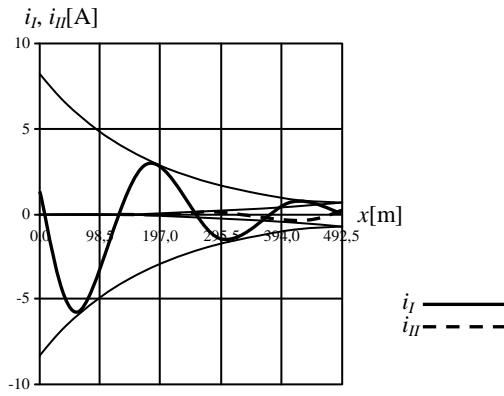
Rys. 21.15. Wykres przesunięcia fazowego $\beta_{przes.} = f(x)$ dla napięcia i prądu w linii długiej obciążonej impedancją $\underline{Z}_2 = (0,2 - j1) \Omega$ dla $\underline{U}_1 = 60 \text{ V}$, $R_0 = 0,1 \Omega/\text{m}$, $L_0 = 0,1 \text{ mH}/\text{m}$, $G_0 = 0,1 \text{ mS}/\text{m}$, $C_0 = 1 \mu\text{F}/\text{m}$, $f = 400 \text{ Hz}$



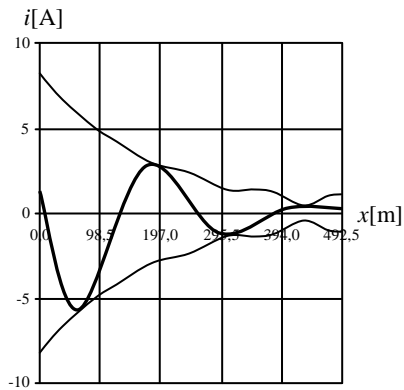
Rys. 21.16. Wykres fali padającej i fali odbitej napięcia $u_I = f(t, x)$, $u_{II} = f(t, x)$ w linii długiej obciążonej impedancją $Z_2 = (0,2 - j1) \Omega$ dla $U_1 = 60$ V, $R_0 = 0,1 \Omega/m$, $L_0 = 0,1$ mH/m, $G_0 = 0,1$ mS/m, $C_0 = 1 \mu\text{F}/m$, $f = 400$ Hz i czasu $t = 0$



Rys. 21.17. Wypadkowa fali padającej i fali odbitej napięcia $u = f(t, x)$ w linii długiej obciążonej impedancją $Z_2 = (0,2 - j1) \Omega$ dla $U_1 = 60$ V, $R_0 = 0,1 \Omega/m$, $L_0 = 0,1$ mH/m, $G_0 = 0,1$ mS/m, $C_0 = 1 \mu\text{F}/m$, $f = 400$ Hz i czasu $t = 0$



Rys. 21.18. Wykres fali padającej i fali odbitej prądu $i_I = f(t, x)$, $i_{II} = f(t, x)$ w linii długiej obciążonej impedancją $Z_2 = (0,2 - j1) \Omega$ dla $U_1 = 60 \text{ V}$, $R_0 = 0,1 \Omega/\text{m}$, $L_0 = 0,1 \text{ mH}/\text{m}$, $G_0 = 0,1 \text{ mS}/\text{m}$, $C_0 = 1 \mu\text{F}/\text{m}$, $f = 400 \text{ Hz}$ i czasu $t = 0$



Rys. 21.19. Wypadkowa fali padającej i fali odbitej prądu $i = f(t, x)$ w linii długiej obciążonej impedancją $Z_2 = (0,2 - j1) \Omega$ dla $U_1 = 60 \text{ V}$, $R_0 = 0,1 \Omega/\text{m}$, $L_0 = 0,1 \text{ mH}/\text{m}$, $G_0 = 0,1 \text{ mS}/\text{m}$, $C_0 = 1 \mu\text{F}/\text{m}$, $f = 400 \text{ Hz}$ i czasu $t = 0$

22. PRZEKSZTAŁCENIE FOURIERA

Każdy przebieg odkształcony niesinusoidalny okresowy spełniający równanie $f(t + kT) = f(t)$, gdzie $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ możemy rozłożyć na składowe sinusoidalne szeregu Fouriera. Przekształcana funkcja $f(t)$ musi spełniać warunki:

- 1) Przedział o długości T można podzielić na skończoną liczbę takich przedziałów, w których funkcja $f(t)$ jest ciągła i monotoniczna, tzn. jest malejąca lub rosnąca.
- 2) Funkcja $f(t)$ ma w przedziale o długości T skończoną liczbę punktów nieciągłości, a ponadto jej wartość bezwzględna jest ograniczona w każdym punkcie tego przedziału.

Jeżeli funkcja $f(t)$ spełnia podane warunki, można przedstawić ją w postaci szeregu Fouriera

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t) = \\ &= \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{mk} \sin(k\omega t + \alpha_k) \end{aligned} \quad (22.1)$$

gdzie:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos k\omega t dt \quad (22.2)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin k\omega t dt \quad (22.3)$$

$$A_0 = a_0 \quad (22.4)$$

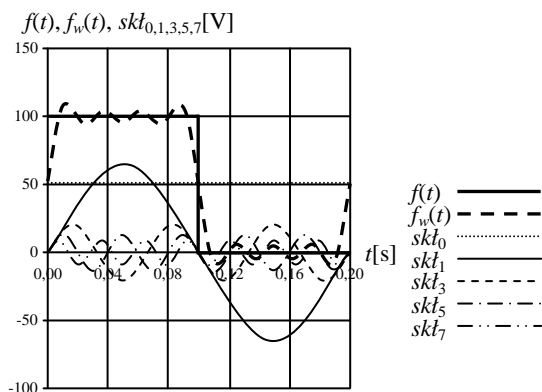
$$A_{mk} = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad (22.5)$$

$$\alpha_k = \operatorname{arctg} \frac{a_k}{b_k} \quad (22.6)$$

Wartość skuteczna przebiegu odkształconego wyrażonego przez składowe sinusoidalne szeregu Fouriera wyraża się zależnością

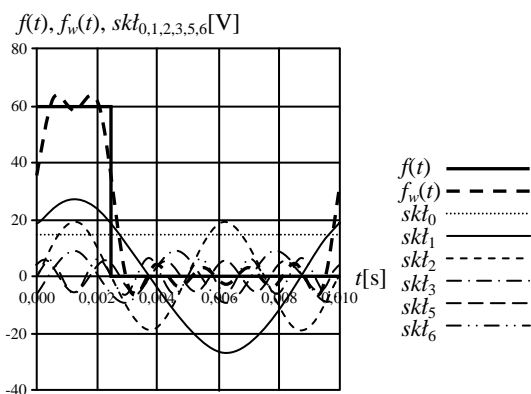
$$A = \sqrt{A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + \dots} \quad (22.7)$$

Na rys. 22.1 przedstawiono przykład rozkładu na szereg Fouriera przebiegu prostokątnego o napięciu $U = 100$ V, okresie $T = 0,2$ s, czasie początkowym z boczna narastającego $t_p = 0$ i współczynniku wypełnienia $n = 0,5$. Wyszczególniono pięć składowych.



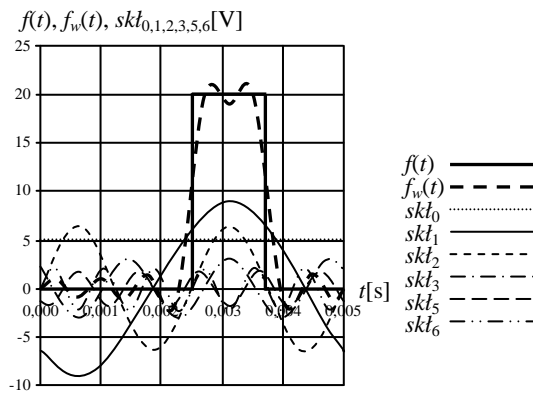
Rys. 22.1. Przykład rozkładu na szereg Fouriera przebiegu prostokątnego o napięciu $U = 100$ V, okresie $T = 0,2$ s, czasie początkowym zbocza narastającego $t_p = 0$ i współczynniku wypełnienia $n = 0,5$

Na rys. 22.2 przedstawiono rozkład na szereg Fouriera przebiegu prostokątnego o napięciu $U = 60$ V, okresie $T = 0,01$ s, czasie początkowym zbocza narastającego $t_p = 0$ i współczynniku wypełnienia $n = 0,25$. Wyszczególniono sześć składowych.



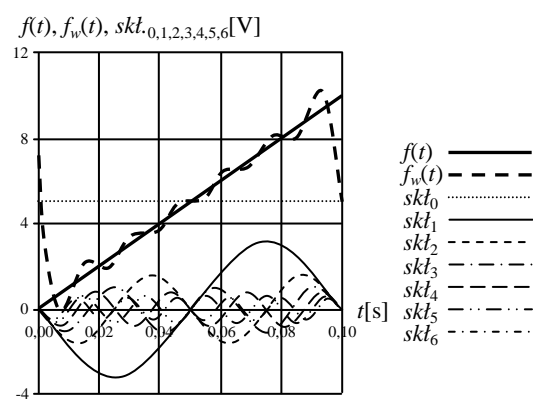
Rys. 22.2. Przykład rozkładu na szereg Fouriera przebiegu prostokątnego o napięciu $U = 60$ V, okresie $T = 0,01$ s, czasie początkowym zbocza narastającego $t_p = 0$ i współczynniku wypełnienia $n = 0,25$

Na rys. 22.3 przedstawiono rozkład na szereg Fouriera przebiegu prostokątnego o napięciu $U = 20$ V, okresie $T = 0,005$ s, czasie początkowym zbocza narastającego $t_p = T/2$ s i współczynniku wypełnienia $n = 0,25$. Wyszczególniono sześć składowych.



Rys. 22.3. Rozkład na szereg Fouriera przebiegu prostokątnego o napięciu $U = 20 \text{ V}$, okresie $T = 0,005 \text{ s}$, czasie początkowym zbocza narastającego $t_p = T/2$ i współczynnikiem wypełnienia $n = 0,25$

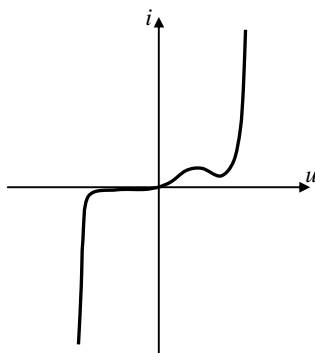
Na rys. 22.4 przedstawiono rozkład na szereg Fouriera przebiegu trójkątnego $f(t) = 100t$ dla $t \in \langle 0, T \rangle$ oraz $T = 0,1 \text{ s}$. Wyszczególniono siedem składowych.



Rys. 22.4. Rozkład na szereg Fouriera przebiegu trójkątnego $f(t) = 100t$ dla $t \in \langle 0, T \rangle$ oraz $T = 0,1 \text{ s}$

23. OBWODY NIELINIOWE

Obwody nieliniowe są to obwody, które zawierają przynajmniej jeden element nieliniowy, których charakterystyka napięciowo-prądowa $u(i)$ jest nieliniowa. Na rys. 23.1 przedstawiono przykładową charakterystykę prądowo-napięciową $i = f(u)$ elementu nieliniowego.



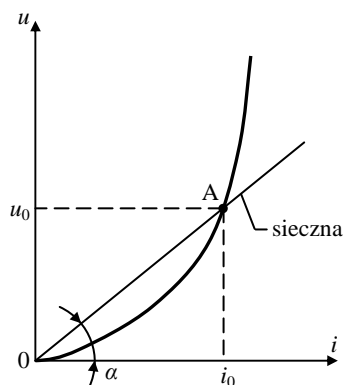
Rys. 23.1. Charakterystyka prądowo-napięciowa $i = f(u)$ elementu nieliniowego

Parametrami charakterystycznymi elementów nieliniowych są rezystancja statyczna i rezystancja dynamiczna.

23.1. Rezystancja statyczna

Rezystancją statyczną elementu nieliniowego w punkcie $A(i_0, u_0)$ charakterystyki napięciowo-prądowej nazywamy iloraz napięcia u_0 przez prąd i_0 w tym punkcie charakterystyki

$$R_{st} = \frac{u_0}{i_0} \Big|_A \quad (23.1)$$



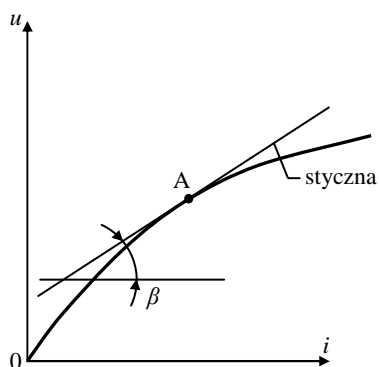
Rys. 23.2. Interpretacja graficzna rezystancji statycznej

W interpretacji graficznej rys. 23.2, rezystancja statyczna jest równa (po uwzględnieniu podziałki na obydwu osiach współrzędnych) wartości tangensa kąta α – nachylenia siecznej do charakterystyki $u = f(i)$ w punkcie $A(u_0, i_0)$.

23.2. Rezystancja dynamiczna

Rezystancją dynamiczną elementu nieliniowego w punkcie $A(u, i)$ charakterystyki napięciowo-prądowej nazywamy wartość pochodnej napięcia względem prądu w rozpatrywanym punkcie

$$R_d = \left. \frac{du}{di} \right|_A \quad (23.2)$$



Rys. 23.3. Interpretacja graficzna rezystancji dynamicznej

Rezystancja dynamiczna jest równa tangensowi kąta β – nachylenia stycznej do charakterystyki napięciowo-prądowej w punkcie A.

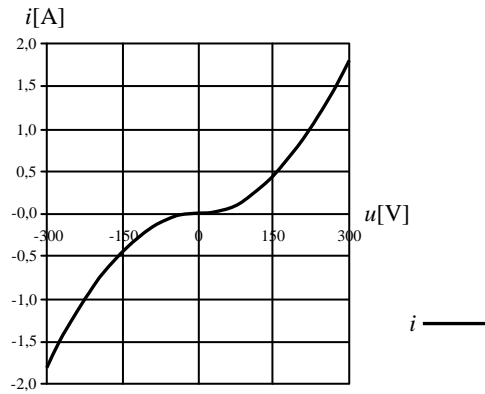
Opór dynamiczny wyznacza się zazwyczaj za pomocą zależności przybliżonej

$$R_d \approx \frac{\Delta u}{\Delta i} \quad (23.3)$$

gdzie Δu , Δi – odpowiadające sobie przyrosty napięcie i prądu odczytane z charakterystyki.

23.3. Przykłady elementów nieliniowych

Przykład 1. Na rys. 23.4 przedstawiono charakterystykę prądowo-napięciową warystora o równaniu $I = AU^n$, przy czym $n = 2$ – współczynnik zależny od materiału i technologii wykonania, $A = 2 \cdot 10^{-5}$ – stała, zależna od wymiarów, kształtu, materiału i technologii wytwarzania (często do opisu warystora stosuje się również równanie $U = CI^\beta$, gdzie $\beta = 1/n$ – współczynnik nieliniowości, C – stała o definicji A).

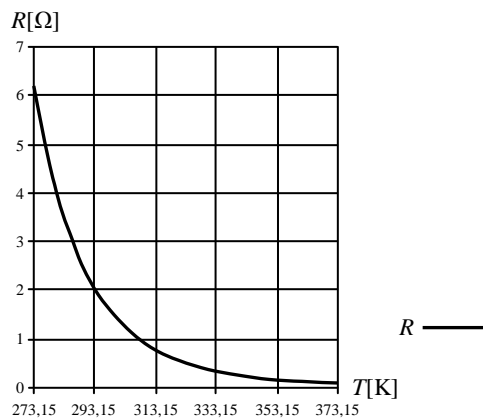


Rys. 23.4. Charakterystyka prądowo-napięciowa warystora o równaniu $I = AU^n$, przy czym $n = 2$ – współczynnik zależny od materiału i technologii wykonania, $A = 2 \cdot 10^{-5} \text{ 1/V}$ – stała, zależna od wymiarów, kształtu, materiału i technologii wytwarzania

Przykład 2. Na rys. 23.5 przedstawiono charakterystykę rezystancji w funkcji temperatury termistora NTC o równaniu

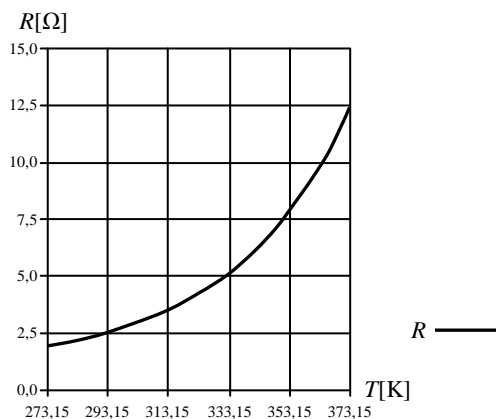
$$R_T = R_{T_1} \exp \left[B \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_1} \right) \right] \quad (23.4)$$

dla $R_{T_1} = 1,6 \Omega$ – rezystancja termistora w temperaturze $T_1 = 298,15 \text{ K}$, $B = 4400 \text{ K}$ – stała materiałowa.



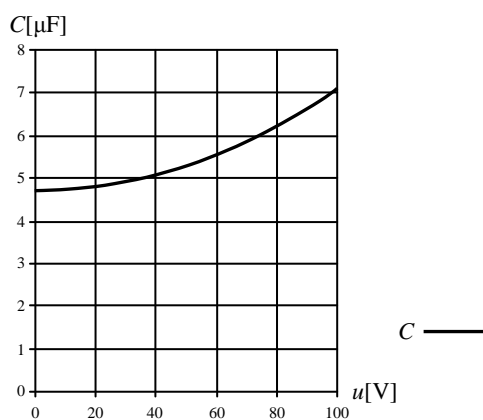
Rys. 23.5. Charakterystyka rezystancyjno-temperaturowa termistora NTC

Przykład 3. Na rys. 23.6 przedstawiono charakterystykę rezystancji w funkcji temperatury termistora PTC o równaniu $R_T = A_1 + A_2 \exp(BT)$, przy czym $A_1 = 1$, $A_2 = 0,001$ – stałe, $B = 0,025 \text{ K}$ – stała materiałowa, T – temperatura bezwzględna, K.



Rys. 23.6. Charakterystyka rezystancyjno-temperaturowa termistora PTC

Przykład 4. Na rys. 23.7 przedstawiono charakterystykę pojemności w funkcji napięcia kondensatora nieliniowego o równaniu $C = C_0(1 + \alpha u^2)$, przy czym $C_0 = 4,7 \mu\text{F}$, $\alpha = 50 \cdot 10^{-6} \text{V}^{-2}$.

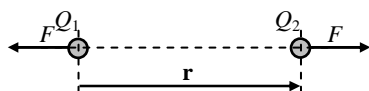


Rys. 23.7. Charakterystyka pojemnościowo-napięciowa kondensatora nieliniowego o równaniu $C = C_0(1 + \alpha u^2)$, przy czym $C_0 = 4,7 \mu\text{F}$, $\alpha = 50 \cdot 10^{-6} \text{V}^{-2}$

24. POLE ELEKTROSTATYCZNE

Pole elektrostatyczne powstaje na wskutek oddziaływań cząstek o ładunku elektrycznym. Zakłada się, że skalarny potencjał elektryczny pola elektrostatycznego zależy tylko od współrzędnych przestrzennych, natomiast nie zależy od czasu $V(x,y,z) = \text{const}$.

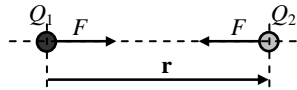
a)



Siły oddziałujące na cząstki o ładunku elektrycznym opisuje prawo Columba, dane wzorem

$$\mathbf{F} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon r^2} \quad (24.1)$$

b)



Rys. 24.1. Siła oddziaływująca na dwa ładunki elektryczne Q_1, Q_2 , a) jednakowymienne, b) różnoimienne

Zgodnie z prawem dwa ładunki elektryczne punktowe działają na siebie siłą proporcjonalną do iloczynu ładunków, a odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości między nimi.

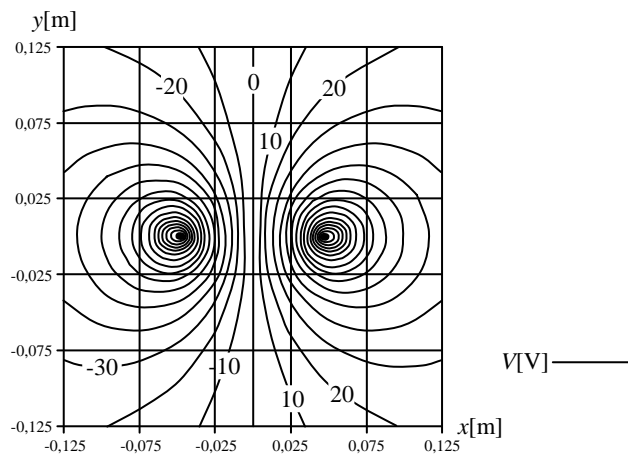
We wzorze (24.1) ϵ - oznacza przenikalność elektryczną ośrodka, której wymiarem jest (F/m). Oznacza ona pojemność elektryczną ośrodka o wymiarach $dV \rightarrow 0$ ($dx dy dz \rightarrow 0$) i określa zdolność ośrodka do magazynowania energii pola elektrycznego.

Natężenie pola elektrycznego wytworzonego przez ładunki elektryczne wyraża się wzorem

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q} \quad (24.2)$$

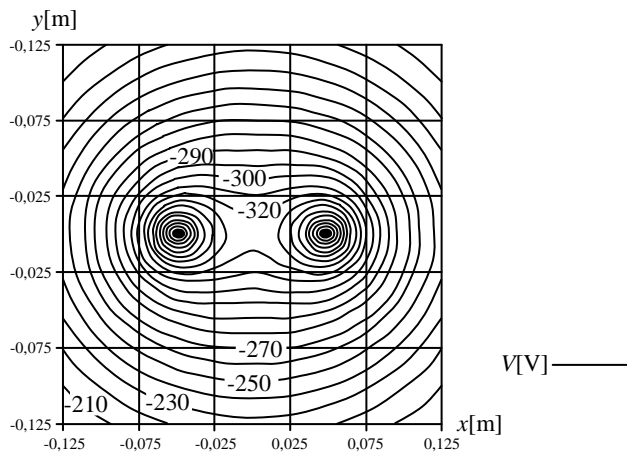
Natężenie pola elektrycznego jest wielkością wektorową i jest proporcjonalne do siły działającej na mały ładunek próbny umieszczony w polu elektrycznym do wartości ładunku.

Na rys. 24.2 przedstawiono rozkład linii ekwipotencjalnych potencjału elektrycznego V pola elektrostatycznego wytworzonego przez dwa ładunki punktowe $Q_1 = -3 \text{ nC}$, $Q_2 = 3 \text{ nC}$ i oddalone od siebie o odległość $d = 0,1 \text{ m}$. Względna przenikalność ośrodka (powietrza) w którym umieszczone są ładunki wynosi $\epsilon_w \approx 1$, natomiast przenikalność rzeczywista równa się $\epsilon = \epsilon_w \cdot \epsilon_0$ ($\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$).



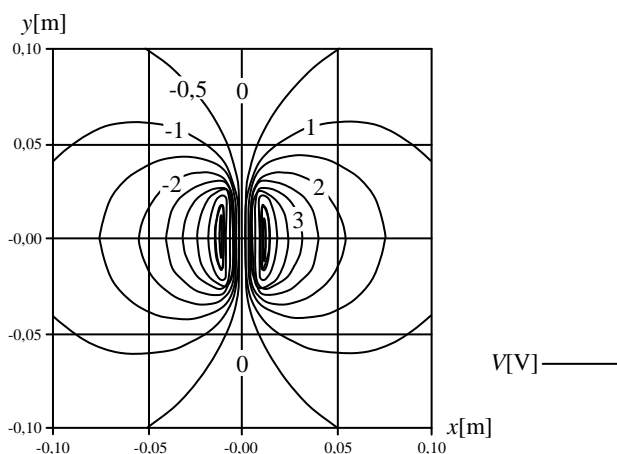
Rys. 24.2. Rozkład linii ekwipotencjalnych potencjału elektrycznego V pola elektrostatycznego wytworzonego przez dwa ładunki punktowe $Q_1 = -3 \text{ nC}$, $Q_2 = 3 \text{ nC}$ oddalone od siebie o odległość $d = 0,1 \text{ m}$ w ośrodku (powietrze) o $\epsilon_w \approx 1$ ($\epsilon = \epsilon_w \cdot \epsilon_0$)

Na rys. 24.3 przedstawiono obraz pola elektrostatycznego podobnie zdefiniowanego jak powyżej tylko o ładunkach jednakowych $Q_1 = -3 \text{ nC}$, $Q_2 = -3 \text{ nC}$.



Rys. 24.3. Rozkład linii ekwipotencjalnych potencjału elektrycznego V pola elektrostatycznego wytworzonego przez dwa ładunki punktowe $Q_1 = -3 \text{ nC}$, $Q_2 = -3 \text{ nC}$ oddalone od siebie o odległość $d = 0,1 \text{ m}$ w ośrodku (powietrze) o $\epsilon_w \approx 1$ ($\epsilon = \epsilon_w \cdot \epsilon_0$)

Szczególnym przykładem pola elektrostatycznego wytworzonego przez zewnętrzne źródło elektryczne przy $U = \text{const.}$ jest pole płaskorównoległe (np. pole wytwarzane w kondensatorze płaskim). W polu tym wektor natężenia pola elektrycznego \mathbf{E} ma stałą wartość.



Rys. 24.4. Pole elektrostatyczne wytwarzane w kondensatorze płaskim o potencjałach elektrod $V_A = -10\text{V}$, $V_B = 10 \text{ V}$ ($U = 20 \text{ V}$), elektrody o długości $l = 0,05 \text{ m}$ i grubości $g = 0,002 \text{ m}$ oddalone są od siebie o odległość $d = 0,015 \text{ m}$

W teorii pola elektromagnetycznego wprowadza się drugą definicję natężenia pola elektrycznego \mathbf{E} daną wzorem

$$\mathbf{E} = -gradV \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{1}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{1}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{1}_z \quad (24.3)$$

który wzór dla pola płaskorównoległego do osi y sprowadza się do postaci

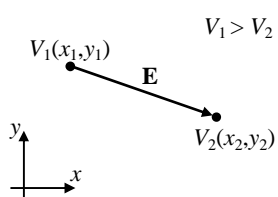
$$\mathbf{E} = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{1}_x \Rightarrow E = \frac{U}{d} \quad (24.4)$$

gdzie U oraz d – napięcie i odległość między elektrodami.

W przypadku pola elektrostatycznego płaskorównoległego wartość natężenia pola elektrycznego jest stała w całym obszarze

$$\mathbf{E} = const. \quad (24.5)$$

Natężenie pola elektrycznego jest wielkością wektorową, posiada długość (wartość), kierunek i zwrot wektora.



Zwrot wektora natężenia pola elektrycznego jest skierowany od punktu o potencjale wyższym do punktu o potencjale niższym, rys. 24.5.

Rys. 24.5. Strzałkowanie wektora natężenie pola elektrycznego \mathbf{E}

Pojemność elektryczną kondensatora płaskiego, której jednostką jest farad (F), definiujemy

$$C = \frac{\epsilon S}{d} \quad (24.6)$$

gdzie S – powierzchnia jednej okładziny kondensatora, d – odległość między okładzinami, lub znając ładunek zgromadzony w kondensatorze i napięcie między okładkami

$$C = \frac{Q}{U} \quad (24.7)$$

gdzie Q – ładunek elektryczny zgromadzony w kondensatorze pod wpływem przełożonego napięcia U .

Energia pola elektrycznego kondensatora wynosi

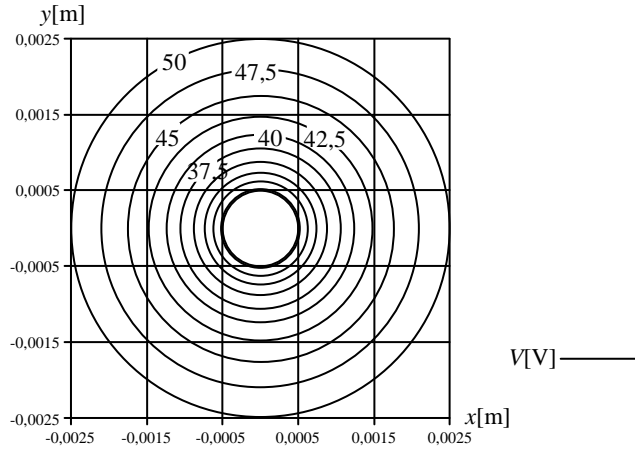
$$W = \frac{1}{2} QU \quad (24.8)$$

a dla $Q = CU$

$$W = \frac{1}{2} CU^2 \quad (24.9)$$

Jednostką podstawową energii pola elektrostatycznego jest dżul (J).

Innym przykładem budowy kondensatora jest kondensator walcowy, w którym wytworzone pole nie jest już płaskorównoległe, lecz posiada kształt okręgów. Na rys. 24.6 przedstawiono pole elektrostatyczne wytwarzane w kondensatorze walcowym o $r_1 = 0,001$ m i $r_2 = 0,005$ m dla potencjałów okładzin $V_1 = 0$ V, $V_2 = 50$ V ($U = 50$ V).



Rys. 24.6. Pole elektrostatyczne wytwarzane w kondensatorze walcowym o $r_1 = 0,001$ m i $r_2 = 0,005$ m dla potencjałów okładzin $V_1 = 0$ V, $V_2 = 50$ V ($U = 50$ V)

Pojemność kondensatora walcowego zależy od promieni r_1 , r_2 okładzin, długości walcowej kondensatora l i przenikalności elektrycznej ϵ zastosowanego dielektryka

$$C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (24.10)$$

Natomiast natężenie pola elektrycznego w punkcie położonym między okładzinami kondensatora wyraża się wzorem

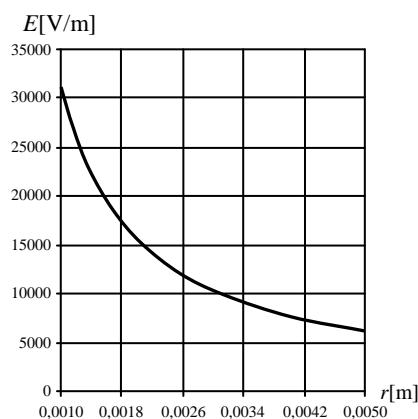
$$E = \frac{U}{r \ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (24.11)$$

gdzie r – odległość punktu od osi kondensatora walcowego.

Napięcie między okładzinami kondensatora walcowego naładowanego ładunkiem q wyraża się wzorem

$$u = \frac{q}{2\pi\epsilon l} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (24.12)$$

Na rys. 24.7 przedstawiono rozkład natężenia pola elektrycznego między okładzinami kondensatora walcowego o potencjałach $V_1 = 0$ V, $V_2 = 50$ V ($U = 50$ V) i promieniach $r_1 = 0,001$ m i $r_2 = 0,005$ m.



Rys. 24.7. Rozkład natężenia pola elektrycznego między okładzinami kondensatora walcowego o potencjałach $V_1 = 0$ V, $V_2 = 50$ V ($U = 50$ V) i promieniach $r_1 = 0,001$ m i $r_2 = 0,005$ m

Innym przykładem pola elektrostatycznego jest pole elektryczne przepływowe przy warunku $I = \text{const}$. Powstaje w wyniku przepływu prądu elektrycznego przez przewodnik o konduktywności γ , a co za tym idzie do odkładania się napięcia w obszarze i wychodzi z zależności

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} \quad (24.13)$$

gdzie \mathbf{J} – wektor gęstości prądu, γ – konduktywność przewodnika wyrażona w (S/m).

Przy warunku bezźródłowości pola elektrycznego przepływowego

$$\text{div} \mathbf{E} = 0 \quad (24.14)$$

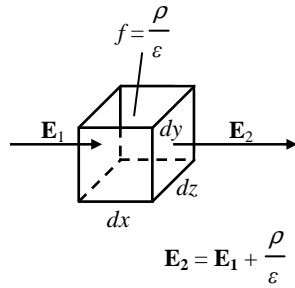
po podstawieniu równania (24.3) do (24.14) otrzymujemy

$$-\text{div}(\text{grad} V) = 0 \quad (24.15)$$

Korzystając z tożsamości różniczkowej $\text{div}(\text{grad} V) = \nabla^2 V$ otrzymujemy równanie polowe Laplace'a

$$\nabla^2 V = 0 \quad (24.16)$$

Diwergencja wektora natężenia pola elektrycznego \mathbf{E} mówi nam o wydajności wewnętrznych źródeł pola elektrycznego. Z definicji diwergencji wektora natężenia pola elektrycznego \mathbf{E}

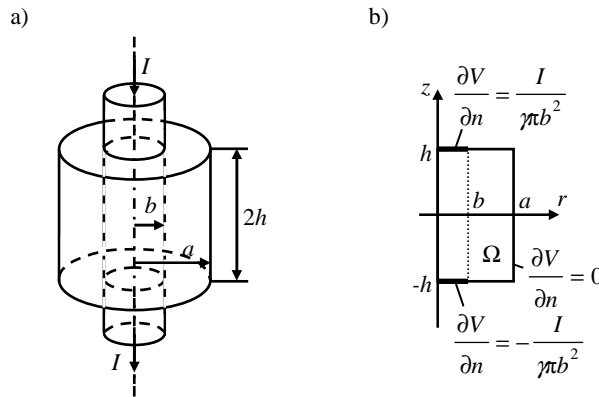


$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}}{\Delta S} \quad (24.17)$$

Rys. 24.8. Diwergencja wektora natężenia pola elektrycznego \mathbf{E} , źródłowość pola elektrycznego

wynika, że wektor wypływający \mathbf{E}_2 z objętości jednostkowej ośrodka dV ma różną wartość od wektora wpływającego \mathbf{E}_1 o wartość źródła pola $f = \rho / \epsilon$.

Przykładem pola elektrycznego przepływowego może być pole wytworzone pod wpływem przepływu prądu elektrycznego przez walec powstały przez obrót wokół osi prostokąta o bokach $2h$ oraz a , rys. 24.9.



Rys. 24.9a) Widok walca wiodącego prąd elektryczny, A, B – elektrody,
b) model matematyczny obszaru działania pola, układ współrzędny osiowosymetryczny (z, r)

W badanym obszarze Ω , rys. 24.9b, potencjał elektryczny V spełnia równanie Laplace'a, które dla układu osiowosymetrycznego przyjmuje postać

$$\Omega: \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (24.18)$$

Na fragmentach ścianek gdzie znajdują się elektrody spełniony jest warunek brzegowy II rodzaju, tzw. Neumana

$$\left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_{z=0, r \in (0, b)} = -\frac{I}{\pi b^2}, \quad \left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_{z=2a, r \in (0, b)} = \frac{I}{\pi b^2} \quad (24.19)$$

Na pozostałym brzegu spełniony jest zerowy warunek Neumana

$$\frac{\partial V}{\partial n} = 0 \quad (24.20)$$

Warunek brzegowy Neumana wynika ze związku między natężeniem gęstości prądu pod elektrodą a natężeniem pola elektrycznego

$$J_n = \gamma E_n \Rightarrow J_n = \gamma \frac{\partial V}{\partial n} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial n} = \frac{1}{\gamma} J_n \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial n} = \frac{I}{\gamma \pi b^2} \quad (24.21)$$

przy założeniu stałej gęstości prądu pod elektrodami.

Równanie różniczkowe (24.18) rozwiązano analityczną metodą rozdzielania zmiennych, gdzie rozwiązanie potencjału elektrycznego $V(z,r)$ w obszarze przyjmuje postać

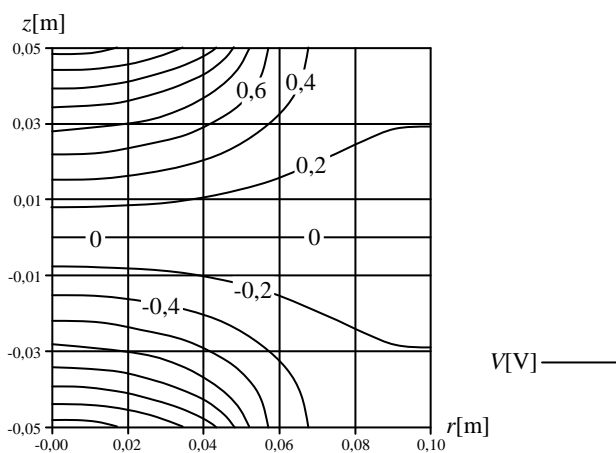
$$V(z,r) = f_0 z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{v_n} J_0(v_n r) \frac{\sinh v_n z}{\cosh v_n h} \quad (24.22)$$

gdzie

$$f_n = \frac{2I}{\gamma \pi a b} \frac{J_1(v_n b)}{j_{1,n} J_0^2(j_{1,n})}, \quad f_0 = \frac{I}{\gamma \pi a^2}, \quad v_n = \frac{j_{1,n}}{a}, \quad j_{1,n} = \left(n + \frac{1}{4}\right) \pi \quad (24.23)$$

i $J_0(x)$, $J_1(x)$ – funkcje Bessela pierwszego rodzaju zerowego i pierwszego rzędu.

Przeprowadzono rozwiązanie szeregu (24.22) dla $a = 0,1$ m, $b = 0,05$ m, $h = 0,05$ m, $\gamma = 100$ S/m i przewodzonego prądu $I = 40$ A. Na rys. 24.10 przedstawiono rozkład linii ekwipotencjalnych potencjału elektrycznego V w obszarze.



Rys. 24.10. Rozkład linii ekwipotencjalnych potencjału elektrycznego V w obszarze dla $a = 0,1$ m, $b = 0,05$ m, $h = 0,05$ m, $\gamma = 100$ S/m, $I = 40$ A

Gdy zachodzi potrzeba wyznaczenia pola elektrostatycznego w obszarach o kształcie nieregularnym, stosuje się metody numeryczne takie jak metodę elementów skończonych (MES), metodę różnic skończonych (MRS) czy metodę elementów brzegowych (MEB).

Pole elektrostatyczne spełnia warunki

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0 \quad (24.24)$$

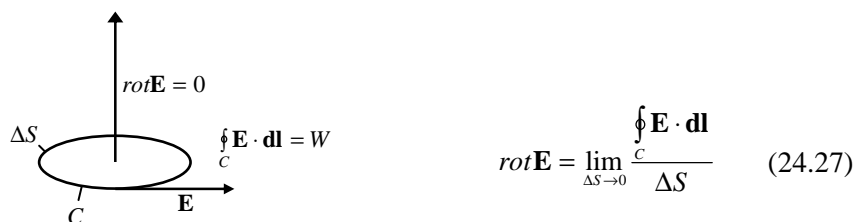
$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho \quad (24.25)$$

a ponadto

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \quad (24.26)$$

Ze wzorów (24.24, 24.25) wynika, że pole elektrostatyczne jest bezwirowe i źródłowe.

Z definicji rotacji wektora natężenia pola elektrycznego \mathbf{E} , dla warunku bezwirowości $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$



Rys. 24.11. Rotacja wektora natężenia pola elektrycznego \mathbf{E} , bezwirowość pola elektrostatycznego, W – praca wykonana przez wektor \mathbf{E} na krzywej C

wynika, że wektor natężenia pola elektrycznego \mathbf{E} dla pola elektrostatycznego jest stały w czasie, jego wartość, kierunek i zwrot nie ulega zmianie w czasie.

Po podstawieniu równania na natężenie pola elektrycznego (24.3) i równania (24.26) do równania (24.25) oraz korzystając z wcześniej już podanej tożsamości różniczkowej $\operatorname{div}(\operatorname{grad}V) = \nabla^2V$, otrzymujemy równanie Poissona opisujące pole źródłowe

$$-\operatorname{div}(\operatorname{grad}V) = \frac{\rho}{\varepsilon} \Rightarrow \nabla^2V = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (24.28)$$

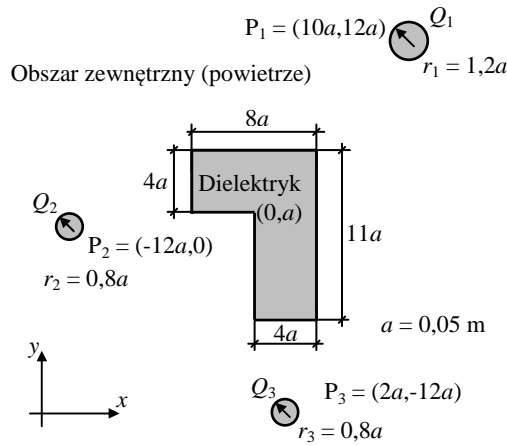
Dla $\rho = 0$ równanie Poissona (24.28) sprowadza się do równania Laplace'a

$$\nabla^2V = 0 \quad (24.29)$$

opisujące pole bezźródłowe.

Rozpatrzmy układ elektryczny dielektryka o nieregularnym kształcie rys. 24.12 i umieszczonych w przestrzeni (powietrzu) trzech ładunków elektrycznych $Q_1 = 3 \text{ nC}$, $Q_2 = -1 \text{ nC}$, $Q_3 = -1 \text{ nC}$. Względna przenikalność elektryczna powietrza wynosi $\varepsilon_{wp} \approx 1$, natomiast dielektryka $\varepsilon_{wd} = 12$, rzeczywista

przenikalność próżni równa się $\epsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m. Przenikalności elektryczne rzeczywiste powietrza i dielektryka wynoszą $\epsilon_p = \epsilon_{wp} \cdot \epsilon_0$, $\epsilon_d = \epsilon_{wd} \cdot \epsilon_0$.

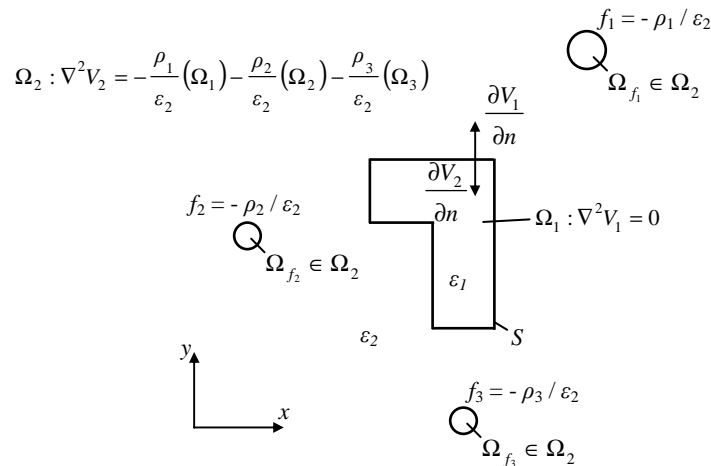


Rys. 24.12. Schemat badanego układu elektrycznego

Gęstości powierzchniowe ładunków Q_A , Q_B , Q_C wynoszą

$$\rho_1 = \frac{Q_1}{S_1} = \frac{Q_1}{\pi r_1^2}, \quad \rho_2 = \frac{Q_2}{S_2} = \frac{Q_2}{\pi r_2^2}, \quad \rho_3 = \frac{Q_3}{S_3} = \frac{Q_3}{\pi r_3^2} \quad (24.30)$$

Na rys. 24.13 przedstawiono model matematyczny badanego zagadnienia polowego gdzie przyjęto oznaczenia $\epsilon_1 = \epsilon_d$ oraz $\epsilon_2 = \epsilon_p$.



Rys. 24.13. Model matematyczny badanego zagadnienia polowego, Ω_1 – obszar dielektryka, Ω_2 – otaczający obszar zewnętrzny

W obszarze Ω_1 czyli dielektryku skalarny potencjał elektryczny V spełnia równanie Laplace'a

$$\Omega_1 : \nabla^2 V_1 = 0 \quad (24.31)$$

natomiast w otaczającym obszarze zewnętrznym Ω_2 równanie Poissona

$$\Omega_2 : \nabla^2 V_2 = -\frac{\rho_1}{\varepsilon_2}(\Omega_1) - \frac{\rho_2}{\varepsilon_2}(\Omega_2) - \frac{\rho_3}{\varepsilon_2}(\Omega_3) \quad (24.32)$$

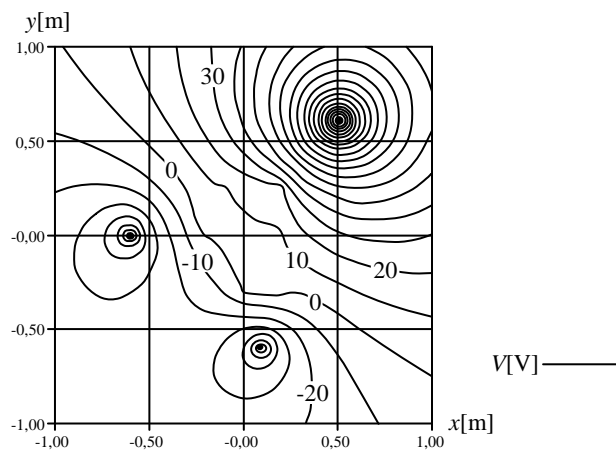
Pomiędzy potencjałami elektrycznymi V_1 i V_2 oraz ich pochodnymi normalnymi na brzegu S zachodzą warunki brzegowe

$$V_1|_S = V_2|_S \quad (24.33)$$

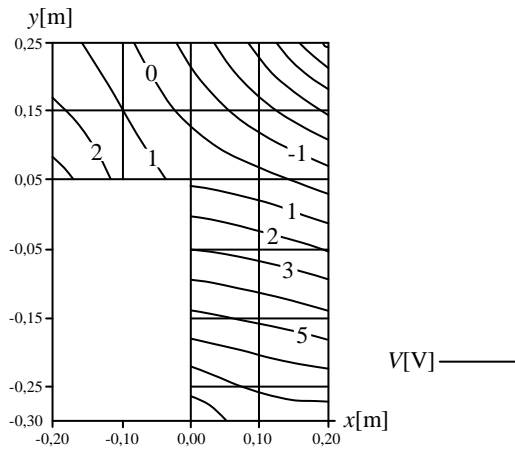
$$\varepsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial n}|_S = -\varepsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial n}|_S \quad (24.34)$$

Równania różniczkowe (24.31, 24.32) z warunkami brzegowymi (24.33, 24.34) rozwiązano hybrydą MEB (hybrydą metody elementów brzegowych).

Na rys. 24.14 przedstawiono rozkład linii ekwipotencjalnych potencjału elektrycznego V w obszarze działania pola, tzn. Ω_1 i Ω_2 , natomiast na rys. 24.15 rozkład linii ekwipotencjalnych potencjału elektrycznego V dla samego dielektryka, tzn. obszaru Ω_1 .

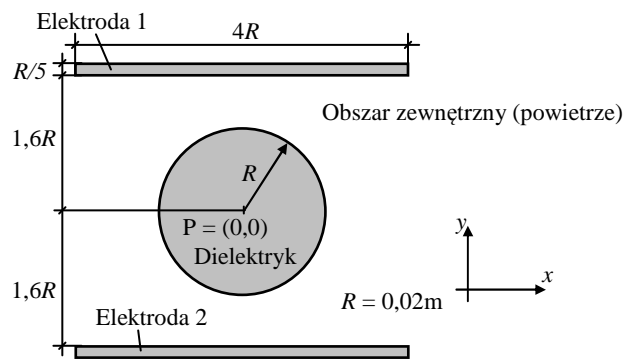


Rys. 24.14. Rozkład linii ekwipotencjalnych potencjału elektrycznego V w badanym obszarze działania pola, tzn. Ω_1 i Ω_2



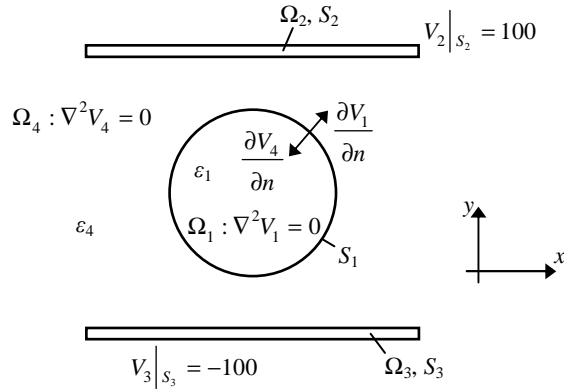
Rys. 24.15. Rozkład linii ekwipotencjalnych potencjału elektrycznego V dla samego obszaru dielektryka, tzn. obszaru Ω_1

Rozpatrzmy następną układ elektryczny rys. 24.16. Stanowi go dielektryk w kształcie koła o promieniu $R = 0,02$ m i dwie elektrody o potencjałach na pierwszej $V_1 = 100$ V i na drugiej $V_2 = -100$ V, które są źródłem pola elektrostatycznego. Względna przenikalność elektryczna dielektryka wynosi $\epsilon_{wd} = 12$, natomiast ośrodka otaczającego (powietrza) $\epsilon_{wp} \approx 1$. Przenikalności elektryczne rzeczywiste dielektryka i powietrza wynoszą $\epsilon_d = \epsilon_{wd} \cdot \epsilon_0$, $\epsilon_p = \epsilon_{wp} \cdot \epsilon_0$, gdzie rzeczywista przenikalność próżni równa się $\epsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m.



Rys. 24.16. Schemat badanego układu elektrycznego

Na rys. 24.17 przedstawiono model matematyczny badanego zagadnienia polowego gdzie przyjęto oznaczenia $\epsilon_1 = \epsilon_d$ oraz $\epsilon_4 = \epsilon_p$.



Rys. 24.17. Model matematyczny badanego zagadnienia polowego,
 Ω_1 – obszar dielektryka, Ω_4 – otaczający obszar zewnętrzny

W obszarze Ω_1 czyli dielektryku oraz obszarze zewnętrznym Ω_4 skalarny potencjał elektryczny V spełnia równanie Laplace'a

$$\Omega_1 : \nabla^2 V_1 = 0, \quad \Omega_4 : \nabla^2 V_4 = 0 \quad (24.35)$$

Pomiędzy potencjałami elektrycznymi V_1 i V_4 oraz ich pochodnymi normalnymi na brzegu S_1 zachodzą warunki brzegowe

$$V_1|_{S_1} = V_4|_{S_1} \quad (24.36)$$

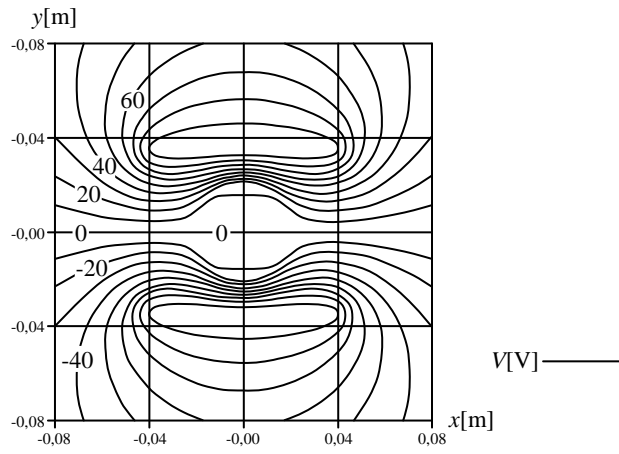
$$\varepsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial n}|_{S_1} = -\varepsilon_4 \frac{\partial V_4}{\partial n}|_{S_1} \quad (24.37)$$

Na brzegach elektrod S_2 oraz S_3 spełniony jest warunek brzegowy I rodzaju, tzw. Dirichleta

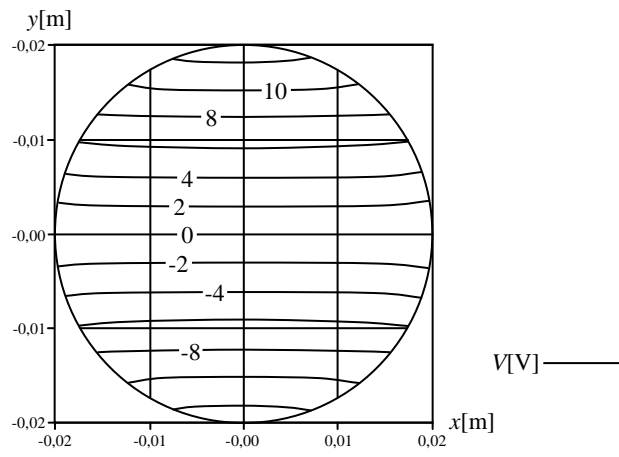
$$V_2|_{S_2} = 100, \quad V_3|_{S_3} = -100 \quad (24.38)$$

Równania różniczkowe (24.35) z warunkami brzegowymi (24.36, 24.37, 24.38) rozwiązano hybrydą MEB (hybrydą metody elementów brzegowych).

Na rys. 24.18 przedstawiono rozkład linii ekwipotencjalnych potencjału elektrycznego V w obszarze działania pola, tzn. Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 i Ω_4 , natomiast na rys. 24.19 rozkład linii ekwipotencjalnych potencjału elektrycznego V dla samego dielektryka, tzn. obszaru Ω_1 .



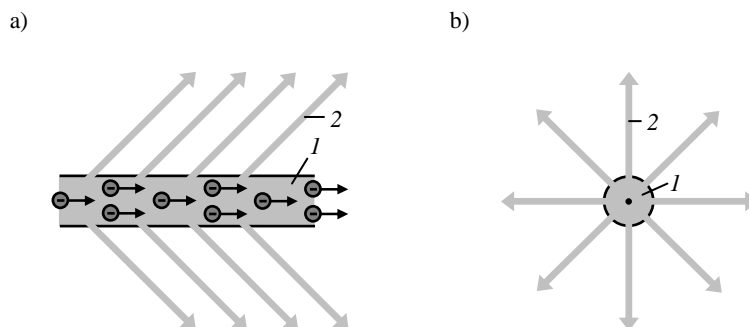
Rys. 24.18. Rozkład linii ekwipotencjalnych potencjału elektrycznego V w badanym obszarze działania pola, tzn. $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ i Ω_4



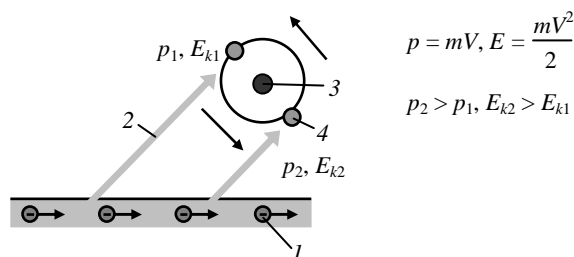
Rys. 24.19. Rozkład linii ekwipotencjalnych potencjału elektrycznego V dla samego obszaru dielektryka, tzn. obszaru Ω_1

25. STATYCZNE POLE MAGNETYCZNE

Statyczne pole magnetyczne powstaje w wyniku ukierunkowanego wirowania elektronów wokół jąder atomów. Powstaje wówczas spin magnetyczny atomu. Przykładem powstawania statycznego pola magnetycznego jest wytwarzanie pola pod wpływem przepływu prądu elektrycznego przy warunku $I = const.$ (pole statyczne). Pod wpływem przepływu prądu (elektronów) przez ośrodek z jego przestrzeni (siatki krystalicznej atomów) wypychana jest materia, która nadaje kierunek wirowania elektronów atomów sąsiadujących z ośrodkiem rys. 25.1 oraz rys. 25.2.

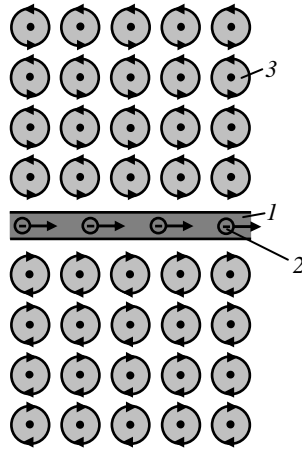


Rys. 25.1. Wypychanie materii przez elektrony z przestrzeni siatki krystalicznej atomów ośrodka wiodącego prąd elektryczny, a) przekrój podłużny, b) przekrój poprzeczny, I – ośrodek wiodący prąd elektryczny (elektrony), 2 – wypychana materia



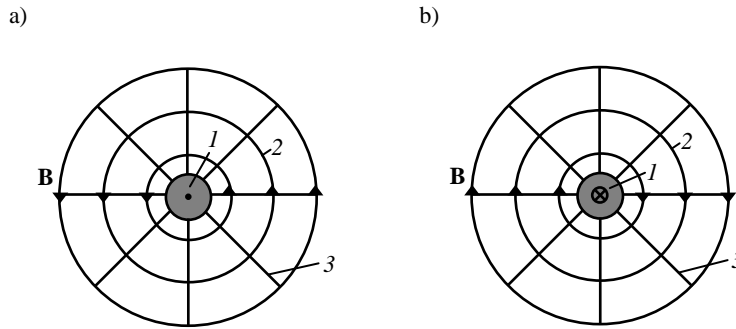
Rys. 25.2. Ukierunkowanie wirowania elektronów atomu przez wypychaną materię z ośrodka wiodącego prąd elektryczny (elektrony), I – ośrodek wiodący prąd elektryczny (elektrony), 2 – wypychana materia, 3 – jądro atomu, 4 – wirujące elektrony, V_1, V_2 – prędkość cząsteczek wypychanej materii, p_1, p_2 – pęd cząsteczek wypychanej materii, E_{k1}, E_{k2} – energia kinetyczna cząsteczek wypychanej materii

W wyniku ukierunkowania wirowania elektronów atomów znajdujących się w sąsiedztwie ośrodka wiodącego prąd elektryczny, powstaje wokół niego pole magnetyczne.



Rys. 25.3. Powstawanie pola magnetycznego w otoczeniu ośrodka wiodącego prąd elektryczny, 1 – ośrodek, 2 – przemieszczające się elektrony (prąd), 3 – ukierunkowanie wirowania elektronów wokół jąder atomów

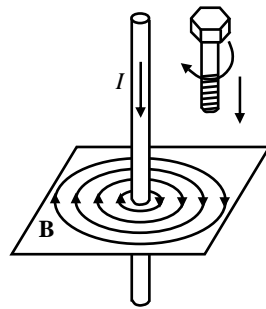
Na rys. 25.4 przedstawiono pole magnetyczne (wektor indukcji magnetycznej \mathbf{B}) wytwarzane przez ośrodek wiodący prąd elektryczny (elektrony).



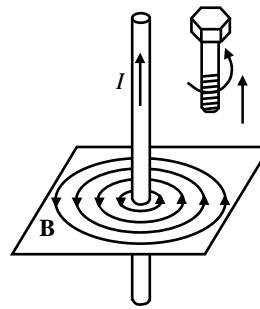
Rys. 25.4. Oznaczanie pola magnetycznego wytwarzanego przez ośrodek wiodący prąd elektryczny (elektrony), a) dla prądu wypływającego, b) dla prądu wpływającego, 1 – ośrodek, 2 – linie wektora indukcji magnetycznej \mathbf{B} , 3 – płaszczyzna, w której ukierunkowane są wirujące elektrony wokół jąder atomów

Na rys. 25.5 przedstawiono sposób stosowania metody śruby prawoskrętnej do wyznaczania zwrotu wektora indukcji magnetycznej \mathbf{B}

a)

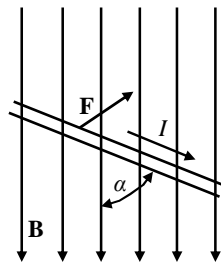


b)



Rys. 25.5a,b) Sposób stosowania metody śruby prawoskrętnej do wyznaczania zwrotu wektora indukcji magnetycznej \mathbf{B}

Podstawowymi zjawiskami wykorzystywanymi w elektrotechnice przemysłowej jest działanie pola magnetycznego na przewód wiodący prąd elektryczny, tzn. powstawanie siły oddziałującej na przewód oraz indukowanie się siły elektromotorycznej (SEM) w przewodzie poruszającym się w polu magnetycznym. Pierwsze zjawisko polega na powstawaniu siły elektrodynamicznej oddziałującej na przewód wiodący prąd elektryczny, który umieszczony jest w polu magnetycznym. Zjawisko to ilustruje rys. 25.6.



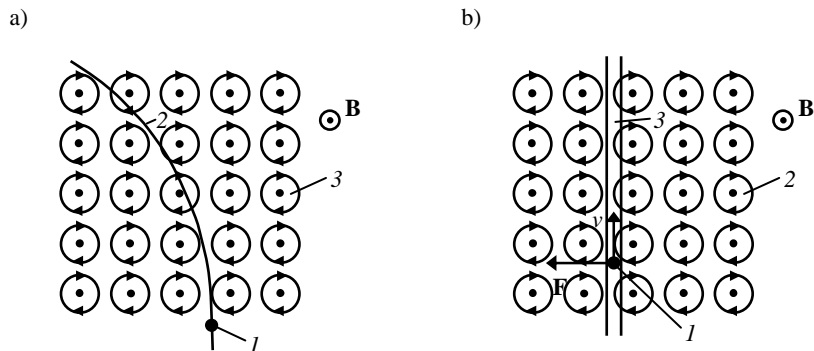
Siła oddziałująca na przewód wyraża się wzorem

$$F = BIl \sin \alpha \quad (25.1)$$

gdzie α – kąt między wektorem indukcji magnetycznej \mathbf{B} a przewodem o długości l .

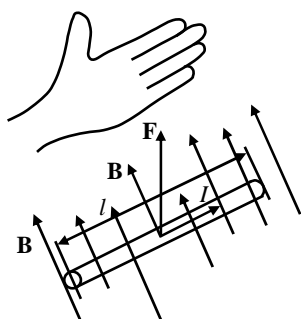
Rys. 25.6. Przewód wiodący prąd elektryczny umieszczony w polu magnetycznym

Zjawisko oddziaływania siły elektrodynamicznej na przewód wiodący prąd elektryczny wynika z wirowego charakteru pola magnetycznego i związane jest z fizyki z siłą Lenza oddziałującą na elektron poruszający się w polu magnetycznym, rys. 25.7.



Rys. 25.7a) Siła Lenza oddziaływująca na rozpędzony elektron w polu magnetycznym, I – rozpędzony elektron, 2 – tor przemieszczania, 3 – ukierunkowane elektrony atomów (pole magnetyczne), b) siła elektrodynamiczna oddziaływująca na przewód wiodący prąd elektryczny, I – przemieszczający się elektron (prąd elektryczny), 2 – przewód, 3 – ukierunkowane elektrony atomów (pole magnetyczne)

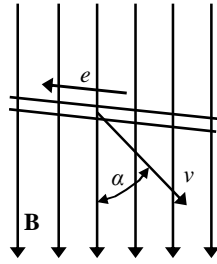
Zwrot powstającej siły elektrodynamicznej wyznacza się za pomocą reguły lewej dłoni, rys. 25.8.



Dłoń ustawiamy w taki sposób by wektor indukcji magnetycznej \mathbf{B} był skierowany ku dłoni, palce wyznaczały kierunek przepływu prądu, natomiast kciuk będzie wyznaczał kierunek powstającej siły elektrodynamicznej.

Rys. 25.8. Wyznaczanie zwrotu oddziałującej siły elektrodynamicznej, reguła lewej dłoni

Drugie zjawisko wykorzystywane w elektrotechnice przemysłowej to zjawisko indukowania się siły elektromotorycznej (SEM) w przewodzie poruszającym się w polu magnetycznym lub zamkniętym obwodzie obejmujący zmienny w czasie strumień magnetyczny.



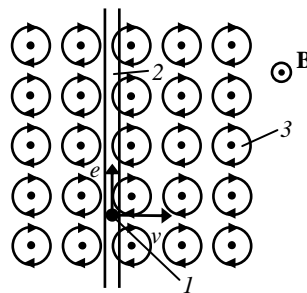
Rys. 25.9. Zjawisko indukowania się siły elektromotorycznej w poruszającym się przewodzie umieszczonym w polu magnetycznym

Siła elektromotoryczna indukowana w poruszającym się przewodzie umieszczonym w polu magnetycznym wyraża się wzorem

$$e = Blv \sin \alpha \quad (25.2)$$

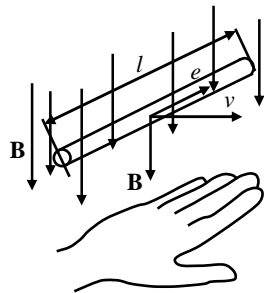
gdzie α – kąt między wektorem indukcji magnetycznej \mathbf{B} a przewodem o długości l .

Zjawisko indukowania się siły elektromotorycznej (SEM) w przewodzie poruszającym się w polu magnetycznym wynika podobnie jak w przypadku oddziaływania siły elektrodynamicznej z wirowego charakteru pola magnetycznego, rys. 25.10.



Rys. 25.10. Indukowanie się siły elektromotorycznej (SEM) w przewodzie poruszającym się w polu magnetycznym, 1 – elektrony przewodnika na które działa siła Lenza, 2 – przewód, 3 – ukierunkowane elektrony atomów (pole magnetyczne)

Zwrot indukowanej siły elektromotorycznej (SEM) wyznacza się za pomocą reguły prawej dłoni, rys. 25.11.



Rys. 25.11. Wyznaczanie zwrotu indukowanej siły elektromotorycznej, reguła prawej dłoni

Dłoń ustawiamy w taki sposób, by wektor indukcji magnetycznej \mathbf{B} był skierowany ku dłoni, kciuk wyznaczał kierunek przemieszczania się przewodu a palce będą wskazywać kierunek indukowanej siły elektromotorycznej.

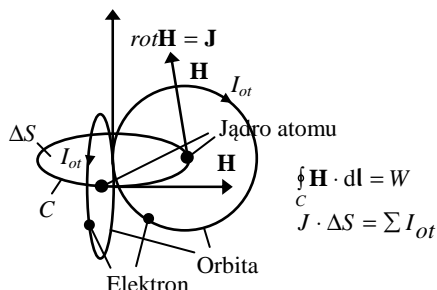
Statyczne pole magnetyczne opisują równania Maxwella w postaci

$$\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (25.3)$$

$$\text{div}\mathbf{B} = 0 \quad (25.4)$$

Wzór (25.3) mówi nam, że pole magnetyczne jest polem wirowym. Wynika to z ukierunkowanego wirowania elektronów wokół jąder, gdzie ruch elektronu stanowi prąd otoczkowy.

Definicja rotacji wektora natężenia pola magnetycznego \mathbf{H}

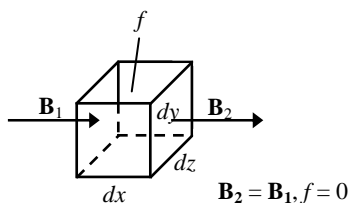


$$\text{rot}\mathbf{H} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} \quad (25.5)$$

Rys. 25.12. Rotacja wektora natężenia pola magnetycznego \mathbf{H} , wirowość pola magnetycznego, W – praca wykonana przez wektor \mathbf{H} na krzywej C

pokazuje, że wektor \mathbf{H} wiruje po krzywej C i związany jest z sumą prądów otoczkowych jakie stanowią wirujące elektrony jąder atomów.

Natomiast ze wzoru (25.4) wynika, że pole magnetyczne jest polem bezźródłowym, rys. 25.13.



$$\text{div}\mathbf{B} = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}}{\Delta S} \quad (25.6)$$

Rys. 25.13. Diwergencja wektora indukcji magnetycznej \mathbf{B} , bezźródłowość pola magnetycznego

Stąd wektor wypływający w objętości jednostkowej dV , mianowicie \mathbf{B}_2 ma tą samą wartość co wektor wpływający \mathbf{B}_1 . Funkcja źródła f dla pola bezźródłowego równa się 0.

Wektor indukcji magnetycznej \mathbf{B} oraz wektor natężenia pola magnetycznego \mathbf{H} łączy związek

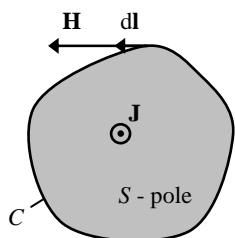
$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \quad (25.7)$$

We wzorze (25.7) μ - oznacza przenikalność magnetyczną ośrodka, której wymiarem jest (H/m). Oznacza ona indukcyjność ośrodka o wymiarze $dV \rightarrow 0$ ($dx'dy'dz \rightarrow 0$) i określa zdolność ośrodka do magazynowania energii pola magnetycznego.

Podstawowym prawem statycznego pola magnetycznego jest prawo przepływu, które wynika z równania Maxwella (25.3).

Mówi ono, że napięcie magnetyczne wzdłuż dowolnej krzywej zamkniętej równa się prądowi przepływającemu przez powierzchnię, której brzegiem jest ta krzywa.

Prawo przepływu w postaci całkowej przyjmuje postać



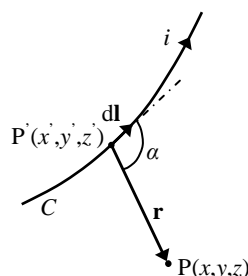
$$\oint_{C(s)} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (25.8)$$

Rys. 25.14. Obszar wiodący prąd elektryczny

natomiast liniowej

$$\sum H \cdot dl = \sum I \quad (25.9)$$

Z prawem przepływu związane jest prawo Biota – Savarta z tą różnicą, że prawo przepływu określa pole magnetyczne w płaszczyźnie, natomiast prawo Biota – Savarta określa pole magnetyczne w przestrzeni trójwymiarowej, według wzoru



$$\mathbf{H}(x, y, z) = \frac{i}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (25.10)$$

Rys. 25.15. Przewód wiodący prąd

Natężenie pola magnetycznego wytworzone przez prąd w elemencie $d\mathbf{l}$ wyraża się wzorem

$$d\mathbf{H} = \frac{i}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (25.11)$$

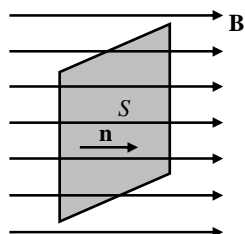
a jego miarą jest

$$dH = \frac{i \sin \alpha dl}{4\pi r^2} \quad (25.12)$$

gdzie α – jest kątem między wektorem \mathbf{r} a wektorem $d\mathbf{l}$.

Znając natężenie pola magnetycznego \mathbf{H} , możemy z zależności (25.7) wyznaczyć indukcję magnetyczną \mathbf{B} .

Strumień magnetyczny ϕ określa się z zależności

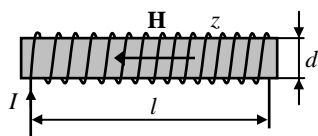


$$\phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} \quad (25.13)$$

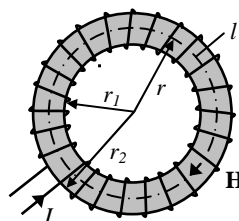
Rys. 25.16. Wyznaczanie strumienia magnetycznego

Z prawa przepływu możemy w prosty sposób wyznaczyć natężenie wewnątrz cewki solenoidalnej i toroidalnej.

a)



b)



Rys. 25.17a) Cewka solenoidalna, b) toroidalna

Dla cewki solenoidalnej natężenie pola magnetycznego wyraża się wzorem

$$H = Iz/l \quad (25.14)$$

natomiast dla cewki toroidalnej

$$H = \frac{Iz}{2\pi r}, \quad r = \frac{r_1 + r_2}{2} \quad (25.15)$$

Przy badaniu obwodów magnetycznych o nieregularnych kształtach stosuje się metody numeryczne takie jak metoda elementów skończonych (MES), metoda elementów brzegowych (MEB) czy metoda różnic skończonych (MRS).

Do opisu statycznego pola magnetycznego wprowadza się potencjał wektorowy pola magnetycznego \mathbf{A} , określony zależnością

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A} \quad (25.16)$$

Dla środowiska jednorodnego $\mu = \text{const.}$ z równania (25.3) otrzymujemy

$$\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} \Rightarrow \text{rot}(\mu\mathbf{H}) = \mu\mathbf{J} \Rightarrow \text{rot}\mathbf{B} = \mu\mathbf{J} \quad (25.17)$$

Uwzględniając równanie (25.16) i wstawiając je do równania (25.17) otrzymujemy

$$\text{rot}(\text{rot}\mathbf{A}) = \mu\mathbf{J} \quad (25.18)$$

Korzystając z tożsamości różniczkowej $\text{rot}(\text{rot}\mathbf{A}) = \text{grad}(\text{div}\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$ i $\text{grad}(\text{div}\mathbf{A}) = 0$ otrzymujemy równanie Poissona opisujące statyczne pole magnetyczne

$$\nabla^2\mathbf{A} = -\mu\mathbf{J} \quad (25.19)$$

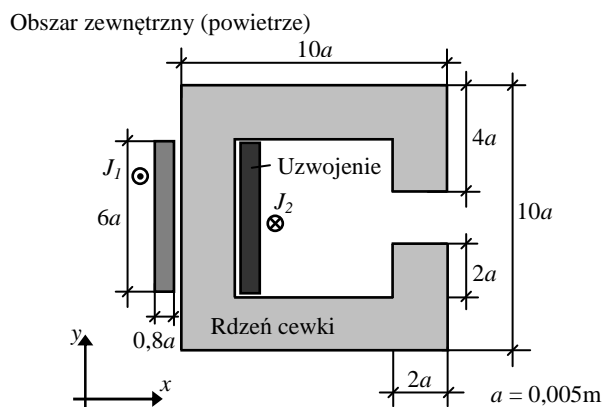
Dla zagadnień płaskorównoległych do osi z w równaniu (25.19) uwzględnia się tylko składową z – ową potencjału wektorowego \mathbf{A}

$$\nabla^2 A = -\mu J \quad (25.20)$$

Dla obszarów bezprądowych równanie Poissona (25.20) sprowadza się do równania Laplace'a

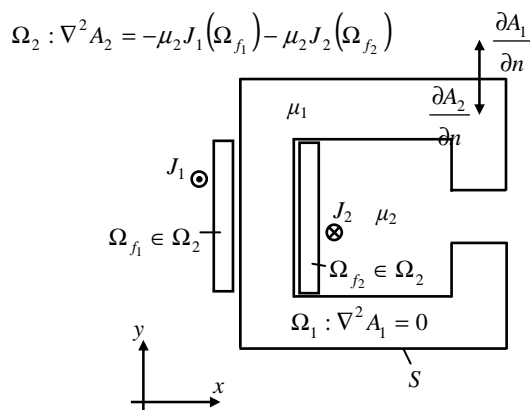
$$\nabla^2 A = 0 \quad (25.21)$$

Rozpatrzmy obwód magnetyczny cewki z rdzeniem o jednym uzwojeniu rys. 25.18, w której gęstości powierzchniowe prądu przepływającego przez uzwojenia wynoszą $J_1 = 5\text{A/mm}^2$, $J_2 = -5\text{A/mm}^2$, rdzeń cewki wykonany jest z materiału ferromagnetycznego o względnej przenikalności magnetycznej $\mu_{wr} = 1000$, natomiast względna przenikalność magnetyczna ośrodka otaczającego cewkę (powietrza) wynosi $\mu_{wp} \approx 1$. Przenikalności magnetyczne rzeczywiste równe są dla rdzenia cewki $\mu_r = \mu_{wr} \cdot \mu_0$, natomiast dla ośrodka otaczającego $\mu_p = \mu_{wp} \cdot \mu_0$, gdzie rzeczywista magnetyczna przenikalność próżni równa się $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}(\text{T}\cdot\text{m})/\text{A}$.



Rys. 25.18. Schemat badanego obwodu magnetycznego

Na rys. 25.19 przedstawiono model matematyczny badanego zagadnienia polowego gdzie przyjęto oznaczenia $\mu_1 = \mu_r$ oraz $\mu_2 = \mu_p$.



Rys. 25.19. Model matematyczny badanego zagadnienia polowego, Ω_1 – obszar rdzenia cewki, Ω_2 – otaczający obszar zewnętrzny

W obszarze rdzenia cewki Ω_1 nie występują źródła prądowe, wobec tego potencjał skalarny pola magnetycznego A w obszarze spełnia równanie Laplace'a

$$\Omega_1 : \nabla^2 A_1 = 0 \quad (25.22)$$

W przestrzeni otaczającej Ω_2 , ze względu na występowanie obszarów prądowych (obszar uzwojenia) Ω_{f_1} i Ω_{f_2} , spełnione jest równanie Poissona

$$\Omega_2 : \nabla^2 A_2 = -\mu_2 J_1(\Omega_{f_1}) - \mu_2 J_2(\Omega_{f_2}) \quad (25.23)$$

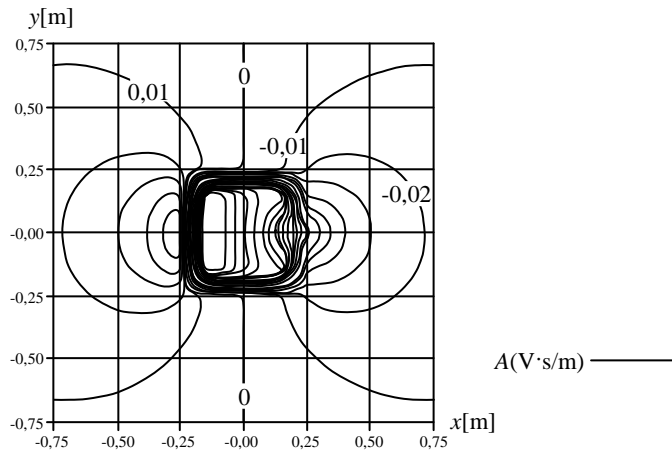
Pomiędzy potencjałami skalarnymi A_1 oraz A_2 na brzegu S obszarów Ω_1 i Ω_2 spełnione są warunki brzegowe

$$A_1|_S = A_2|_S \quad (25.24)$$

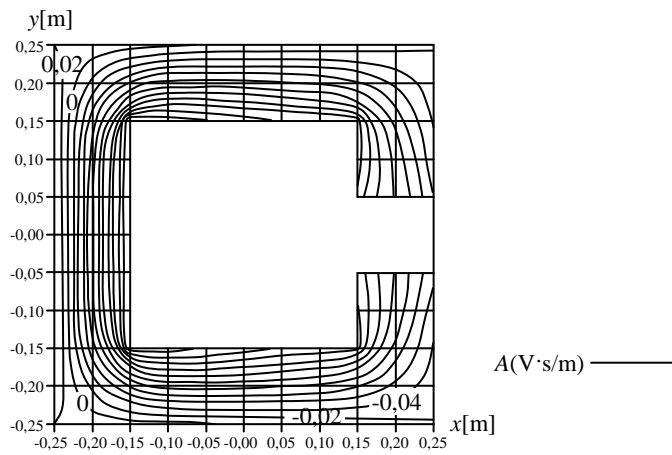
$$\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_1}{\partial n} \Big|_S = -\frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_2}{\partial n} \Big|_S \quad (25.25)$$

Równania różniczkowe (25.22, 25.23) z warunkami brzegowymi (25.24, 25.25) rozwiązano hybrydą MEB (hybrydą metody elementów brzegowych).

Na rys. 25.20 przedstawiono rozkład potencjału skalarnego pola magnetycznego A w całym obszarze działania pola, tzn. Ω_1 i Ω_2 , natomiast na rys. 25.21 rozkład potencjału skalarnego dla samego rdzenia cewki, tzn. obszaru Ω_1 .



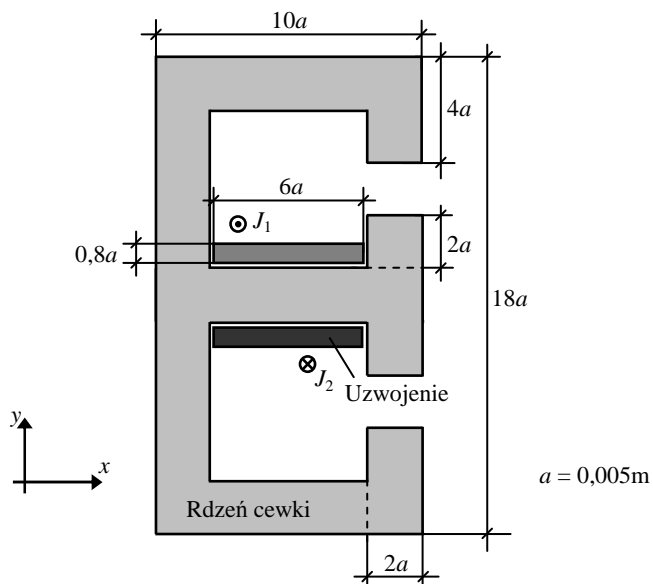
Rys. 25.20. Rozkład potencjału skalarnego pola magnetycznego A w badanym obszarze działania pola, tzn. Ω_1 i Ω_2



Rys. 25.21. Rozkład potencjału skalarnego pola magnetycznego A dla samego obszaru rdzenia cewki, tzn. obszaru Ω_1

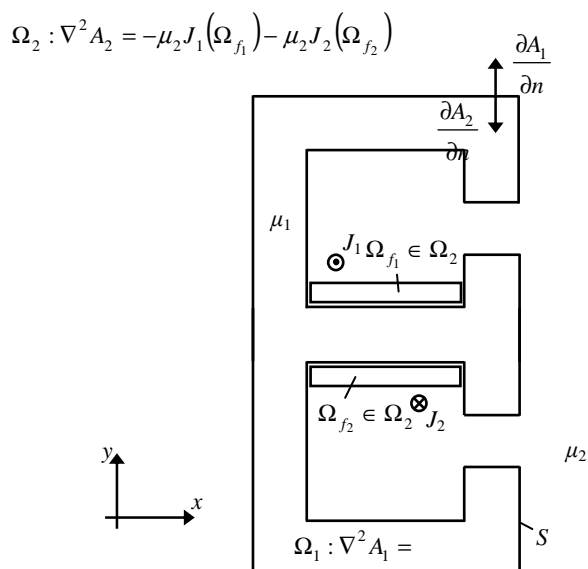
Rozpatrzmy następny obwód magnetyczny rys. 25.22, który stanowi cewka z rdzeniem o jednym uzwojeniu. Gęstości powierzchniowe prądu przepływającego przez uzwojenia wynoszą $J_1 = 5\text{A/mm}^2$, $J_2 = -5\text{A/mm}^2$, rdzeń cewki wykonany jest z materiału ferromagnetycznego o względnej przenikalności magnetycznej $\mu_{wr} = 1000$, natomiast względna przenikalność magnetyczna ośrodka otaczającego cewkę (powietrza) wynosi $\mu_{wp} \approx 1$.

Obszar zewnętrzny (powietrze)



Rys. 25.22. Schemat badanego obwodu magnetycznego

Na rys. 25.23 przedstawiono model matematyczny badanego zagadnienia polowego gdzie przyjęto oznaczenia $\mu_1 = \mu_r$ oraz $\mu_2 = \mu_p$.



Rys. 25.23. Model matematyczny badanego zagadnienia polowego, Ω_1 – obszar rdzenia cewki, Ω_2 – otaczający obszar zewnętrzny

Podobnie jak w poprzednim przykładzie w obszarze rdzenia cewki Ω_1 nie

występują źródła prądowe, wobec tego potencjał skalarny pola magnetycznego A w obszarze spełnia równanie Laplace'a

$$\Omega_1 : \nabla^2 A_1 = 0 \quad (25.26)$$

W przestrzeni otaczającej Ω_2 , ze względu na występowanie obszarów prądowych (obszar uzwojenia) Ω_{f_1} i Ω_{f_2} , spełnione jest równanie Poissona

$$\Omega_2 : \nabla^2 A_2 = -\mu_2 J_1(\Omega_{f_1}) - \mu_2 J_2(\Omega_{f_2}) \quad (25.27)$$

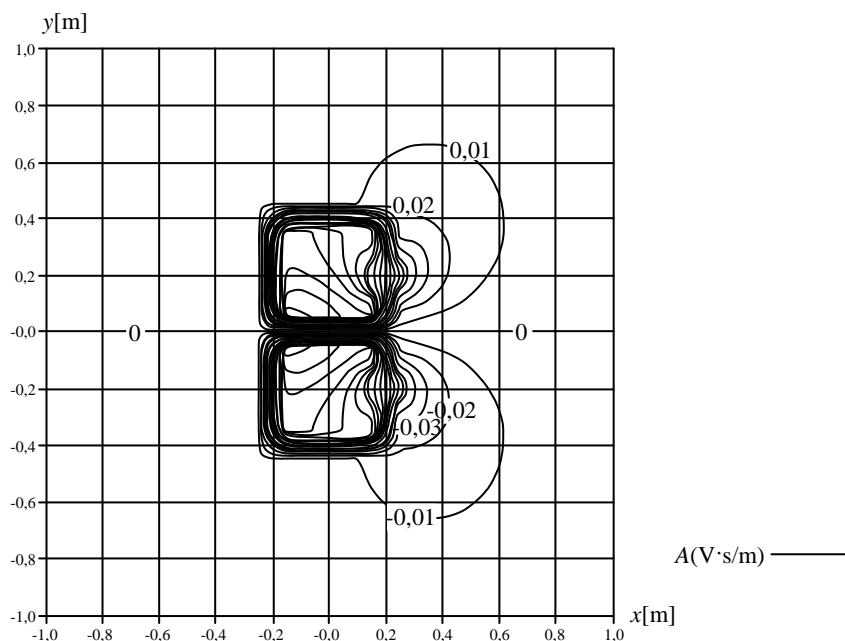
Pomiędzy potencjałami skalarnymi A_1 oraz A_2 na brzegu S obszarów Ω_1 i Ω_2 spełnione są warunki brzegowe

$$A_1|_S = A_2|_S \quad (25.28)$$

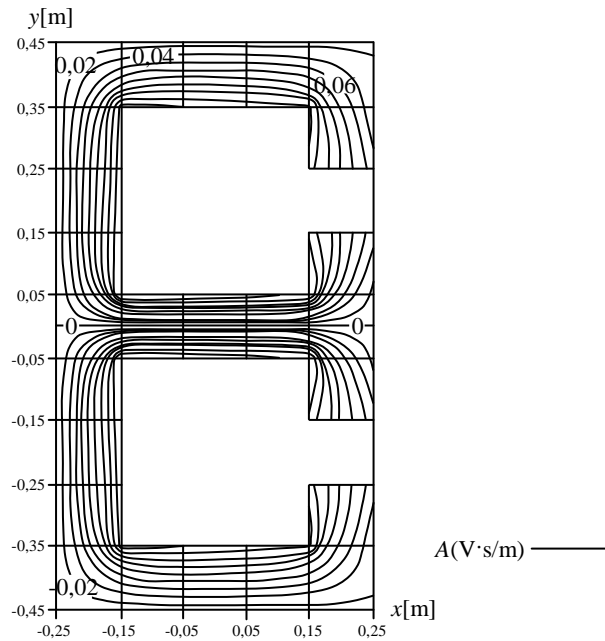
$$\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_1}{\partial n} \Big|_S = -\frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_2}{\partial n} \Big|_S \quad (25.29)$$

Równania różniczkowe (25.26, 25.27) z warunkami brzegowymi (25.28, 25.29) rozwiązano hybrydą MEB (hybrydą metody elementów brzegowych).

Na rys. 25.24 przedstawiono rozkład potencjału skalarnego pola magnetycznego A w całym obszarze działania pola, tzn. Ω_1 i Ω_2 , natomiast na rys. 25.25 rozkład potencjału skalarnego dla samego rdzenia cewki, tzn. obszaru Ω_1 .



Rys. 25.24. Rozkład potencjału skalarnego pola magnetycznego A w badanym obszarze działania pola, tzn. Ω_1 i Ω_2



Rys. 25.25. Rozkład potencjału skalarnego pola magnetycznego A dla samego obszaru rdzenia cewki, tzn. obszaru Ω_1

26. POLE I FALE ELEKTROMAGNETYCZNE

Zmiennym polem elektromagnetycznym nazywamy zaburzenia materii (powstawanie gradientu potencjału elektrycznego czyli pola elektrycznego) i wprowadzaniu w ruch wirowy elektronów tej materii pod wpływem przepływu prądu wyrównawczego (powstaje wówczas pole magnetyczne). Pole elektryczne współlistnieje z polem magnetycznym, gdzie cykliczne przemiany pola elektrycznego w pole magnetyczne a następnie pola magnetycznego w pole elektryczne związane są z propagacją falową zaburzeń materii, ruchu wirowego elektronów oraz z jego przenikalnością magnetyczną.

Zmienne pole elektromagnetyczne w ośrodku jednorodnym izotropowym o przenikalności elektrycznej ε i magnetycznej μ opisują równania Maxwella

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (26.1)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (26.2)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (26.3)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \quad (26.4)$$