

a ponadto zachodzą zależności

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \quad (26.5)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \quad (26.6)$$

$$\mathbf{J} = \gamma\mathbf{E} \quad (26.7)$$

gdzie γ – konduktywność ośrodka w którym wiruje pole elektromagnetyczne.

W praktyce najczęściej mamy do czynienia z polem elektromagnetycznym sinusoidalnym zmiennym. Do opisu pola wprowadza się zespolony potencjał wektorowy pola elektromagnetycznego definiowany zależnością

$$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A} \quad (26.8)$$

Równania Maxwella (26.1, 26.2) przy uwzględnieniu prądu wymuszonego o gęstości \mathbf{J}_w dla wielkości zespolonych przyjmują postać

$$\text{rot}\mathbf{H} = (\gamma + j\omega\varepsilon)\mathbf{E} + \mathbf{J}_w \quad (26.9)$$

$$\text{rot}\mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad (26.10)$$

Mnożąc pierwsze równanie Maxwella (26.9) przez μ otrzymujemy

$$\text{rot}\mathbf{B} = \mu(\gamma + j\omega\varepsilon)\mathbf{E} + \mu\mathbf{J}_w \quad (26.11)$$

Podstawiając równanie (26.8) do drugiego równania Maxwella (26.10) otrzymujemy

$$\text{rot}\mathbf{E} = -j\omega\text{rot}\mathbf{A} \Rightarrow \text{rot}(\mathbf{E} + j\omega\mathbf{A}) = 0 \quad (26.12)$$

Korzystając z tożsamości różniczkowej $\text{rot}(\text{grad}\varphi) = 0$, przekształcając równanie (26.12) otrzymujemy

$$\mathbf{E} + j\omega\mathbf{A} = -\text{grad}\varphi \quad (26.13)$$

Wstawiając wzór (26.8) oraz (26.13) do równania (26.11) otrzymujemy

$$\text{rotrot}\mathbf{A} = -k^2\mathbf{A} - \mu(\gamma + j\omega\varepsilon)\text{grad}\varphi + \mu\mathbf{J}_w \quad (26.14)$$

gdzie $k = \sqrt{j\omega\mu(\gamma + j\omega\varepsilon)}$.

Dla tożsamości różniczkowej $\text{rotrot}\mathbf{A} = \text{graddiv}\mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A}$ otrzymujemy

$$\text{graddiv}\mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A} = -k^2\mathbf{A} - \mu(\gamma + j\omega\varepsilon)\text{grad}\varphi + \mu\mathbf{J}_w \quad (26.15)$$

Przyjmując warunek dodatkowy

$$\text{div}\mathbf{A} = -\mu(\gamma + j\omega\varepsilon)\varphi \quad (26.16)$$

otrzymujemy niejednorodne równanie polowe Helmholtza dla zespolonego

potencjału wektorowego prądów wirowych $\underline{\mathbf{A}}_w$

$$\nabla^2 \underline{\mathbf{A}}_w - k^2 \underline{\mathbf{A}}_w = -\mu \underline{\mathbf{J}}_w \quad (26.17)$$

Przy pominięciu prądów przesunięcia, na przykład w przewodnikach, k przyjmuje postać

$$k = \sqrt{j\omega\mu\gamma} \quad (26.18)$$

Równanie (26.17) można uczynić jednorodnym przez podstawienie

$$\underline{\mathbf{A}}_w = \underline{\mathbf{A}} - \underline{\mathbf{A}}_z, \quad \underline{\mathbf{A}}_z = \frac{\underline{\mathbf{J}}_w}{-j\omega\gamma} = \text{const.} \quad (26.19)$$

gdzie $\underline{\mathbf{A}}$ – potencjał wektorowy indukowanego pola całkowitego, $\underline{\mathbf{A}}_z$ – składowa stała potencjału wektorowego pochodząca od wymuszenia $\underline{\mathbf{J}}_w$.

Ostatecznie otrzymujemy równanie jednorodne Helmholtza opisujące pole elektromagnetyczne

$$\nabla^2 \underline{\mathbf{A}} - k^2 \underline{\mathbf{A}} = 0 \quad (26.20)$$

Całkowita gęstość prądu w obszarze w przypadku równania jednorodnego podaje zależność

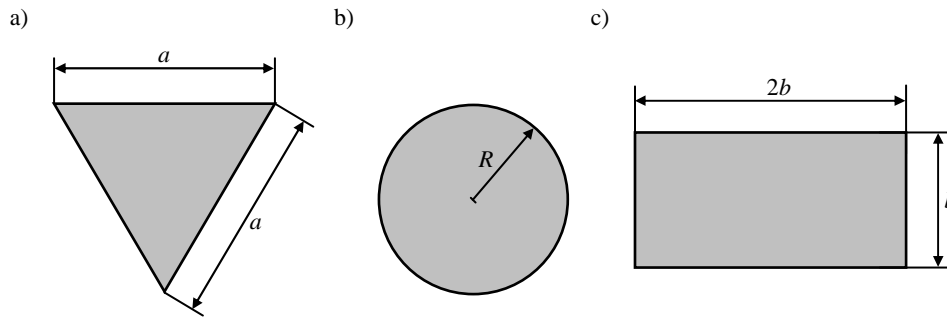
$$\underline{\mathbf{J}} = -j\omega\gamma \underline{\mathbf{A}} \quad (26.21)$$

Dla zagadnień płaskorównoległych do osi z , równania (26.20, 26.21) sprowadzają się do jednej składowej

$$\nabla^2 \underline{A} - k^2 \underline{A} = 0, \quad \underline{J} = -j\omega\gamma \underline{A} \quad (26.22)$$

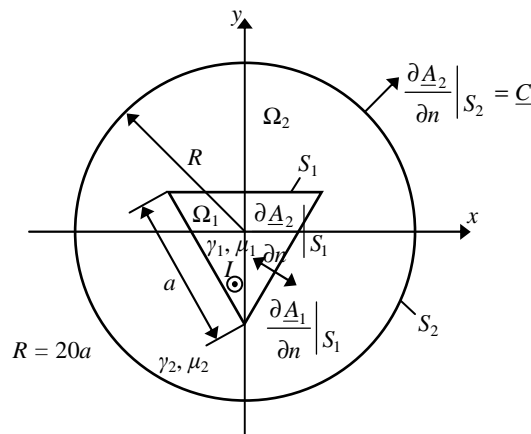
Rozpatrzmy przykład pola elektromagnetycznego wytwarzanego wewnątrz przewodu wiodącego sinusoidalnie zmienny prąd elektryczny. Zmienny w czasie prąd elektryczny wytwarza zmienne w czasie pole elektromagnetyczne. Jest to pole quasi – stacjonarne, w którym nie uwzględnia się zjawisk falowych rozchodzenia się fal elektromagnetycznych w ośrodku, czyli $\lambda \gg l$, gdzie l – najmniejszy wymiar ośrodka.

Rozpatrzmy przewody o trzech różnych kształtach przekrojów poprzecznych, trójkątnym, okrągłym i prostokątnym. Przewody ułożone w powietrzu wiodą sinusoidalnie zmienny prąd o wartości skutecznej $I = 100$ A i wykonane są z miedzi o konduktywności $\gamma_{Cu} = 57 \cdot 10^6$ S/m. Konduktywność ośrodka otaczającego (powietrza) $\gamma_p = 0$. Względna przenikalność magnetyczna miedzi i ośrodka otaczającego wynosi $\mu_{wCu} \approx \mu_{wp} \approx 1$, natomiast przenikalności magnetyczne rzeczywiste równe są dla miedzi $\mu_{Cu} = \mu_{wCu} \cdot \mu_0$, natomiast dla ośrodka otaczającego $\mu_p = \mu_{wp} \cdot \mu_0$, gdzie rzeczywista magnetyczna przenikalność próżni równa się $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ (T·m)/A. Wymiary przewodów wynoszą $a = 5$ mm, $R = 2$ mm, $b = 2$ mm.



Rys. 26.1. Kształt przewodów, a) trójkątny, b) okrągły, c) prostokątny

Na rys. 26.2 przedstawiono analizę funkcji polowej, gdzie przyjęto oznaczenia $\mu_1 = \mu_{prz}$, $\mu_2 = \mu_p$ oraz $\gamma_1 = \gamma_{prz}$, $\gamma_2 = \gamma_p$.



Rys. 26.2. Analiza funkcji polowej

W obszarze przewodnika Ω_1 zespolony potencjał skalarny pola elektromagnetycznego indukowanych prądów wirowych wyraża się wzorem niejednorodnym Helmholtza

$$\Omega_1 : \nabla^2 \underline{A}_{w1} - k^2 \underline{A}_{w1} = -\mu_1 \underline{J}_w \quad (26.23)$$

Sprowadzając równanie (26.23) do postaci jednorodnej dla całkowitego potencjału skalarnego indukowanego pola otrzymujemy

$$\Omega_1 : \nabla^2 \underline{A}_1 - k^2 \underline{A}_1 = 0 \quad (26.24)$$

gdzie $k = \sqrt{j\omega\mu_1\gamma_1}$.

W obszarze Ω_2 , tzn. otaczającej przewod przestrzeni (powietrze), spełnione jest równanie Laplace'a

$$\Omega_2 : \nabla^2 \underline{A}_2 = 0 \quad (26.25)$$

Całkowita gęstość prądu w przewodniku, tzn. obszarze Ω_1 , wyrażać będzie się wzorem

$$\underline{J} = -j\omega\gamma\underline{A}_1 \quad (26.26)$$

natomiast względna

$$\underline{J}' = \frac{\underline{J}}{J_0}, \quad J_0 = \frac{I}{S_{ob.}} \quad (26.27)$$

gdzie I – prąd przepływający przez przewodnik, $S_{ob.}$ – pole przekroju poprzecznego przewodnika (obszaru Ω_1).

Pomiędzy zespolonymi potencjałami skalarnymi \underline{A}_1 oraz \underline{A}_2 na brzegu S_1 obszarów Ω_1 i Ω_2 spełnione są warunki brzegowe

$$\underline{A}_1|_{S_1} = \underline{A}_2|_{S_1} \quad (26.28)$$

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial \underline{A}_1}{\partial n} \Big|_{S_1} = -\frac{1}{\mu_2} \frac{\partial \underline{A}_2}{\partial n} \Big|_{S_1} \quad (26.29)$$

Na brzegu S_2 spełniony jest warunek II rodzaju tzw. Neumana wyznaczany z prawa przepływu

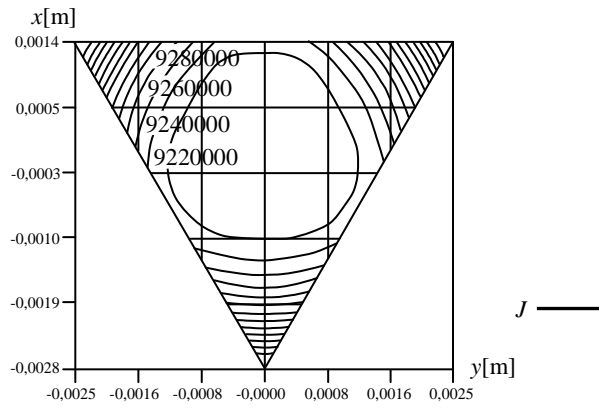
$$\oint_{S_2} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \quad (26.30)$$

W tym przypadku

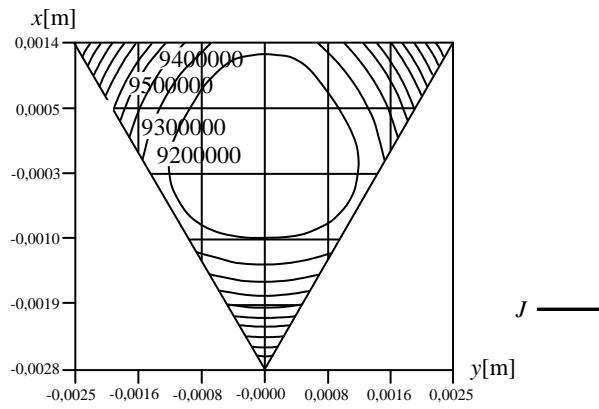
$$\oint_{S_2} H_t dl = I, \quad H_t = \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial \underline{A}_2}{\partial n} \Rightarrow \frac{\partial \underline{A}_2}{\partial n} \Big|_{S_2} = \frac{\mu_2 I}{l}, \quad l = 2\pi R \quad (26.31)$$

Równania (26.24, 26.25, 26.26) z warunkami brzegowymi (26.28, 26.29, 26.31) rozwiązano hybrydą MEB (hybrydą metody elementów brzegowych).

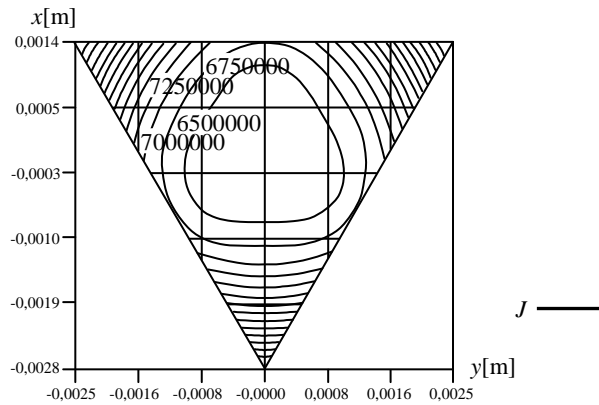
Na rys. 26.3, 26.4 oraz 26.5 przedstawiono rozkład rzeczywistych wartości gęstości prądu w przewodzie o przekroju poprzecznym trójkątnym dla $f = 0,5$ kHz; 1 kHz; 2 kHz.



Rys. 26.3. Rozkład rzeczywistych wartości gęstości prądu w przewodzie o przekroju poprzecznym trójkątnym dla $f = 0,5$ kHz

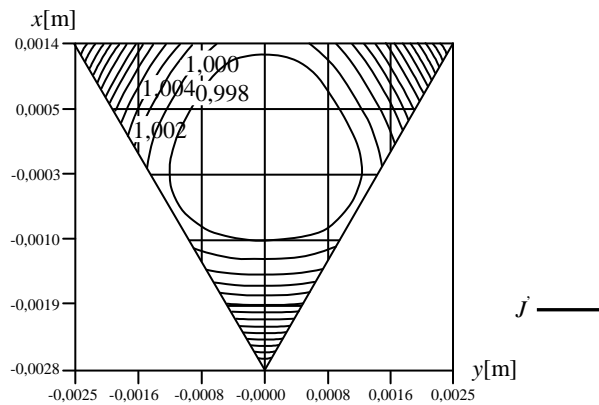


Rys. 26.4. Rozkład rzeczywistych wartości gęstości prądu w przewodzie o przekroju poprzecznym trójkątnym dla $f = 1$ kHz

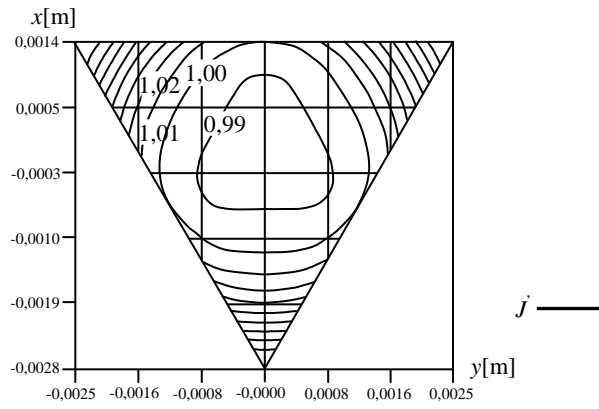


Rys. 26.5. Rozkład rzeczywistych wartości gęstości prądu w przewodzie o przekroju poprzecznym trójkątnym dla $f = 2$ kHz

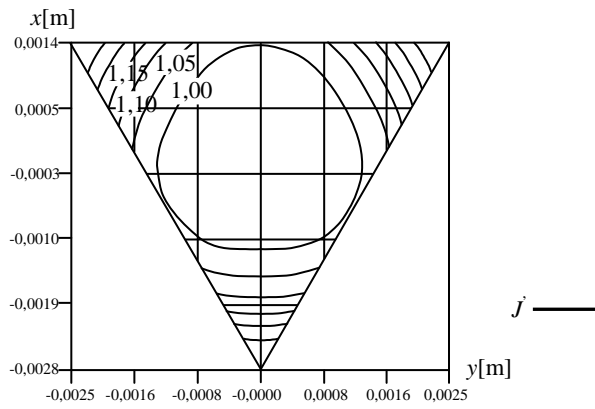
Na rys. 26.6, 26.7 oraz 26.8 przedstawiono rozkład względnej wartości gęstości prądu w przewodzie o przekroju poprzecznym trójkątnym dla $f = 0,5$ kHz; 1 kHz; 2 kHz.



Rys. 26.6. Rozkład względnej wartości gęstości prądu w przewodzie o przekroju poprzecznym trójkątnym dla $f = 0,5$ kHz

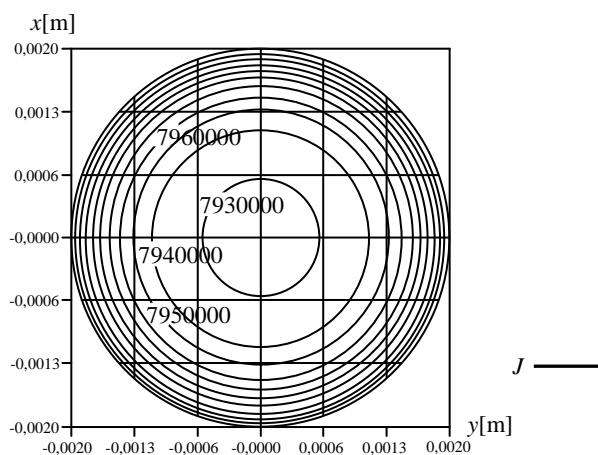


Rys. 26.7. Rozkład względnej wartości gęstości prądu w przewodzie o przekroju poprzecznym trójkątnym dla $f = 1$ kHz

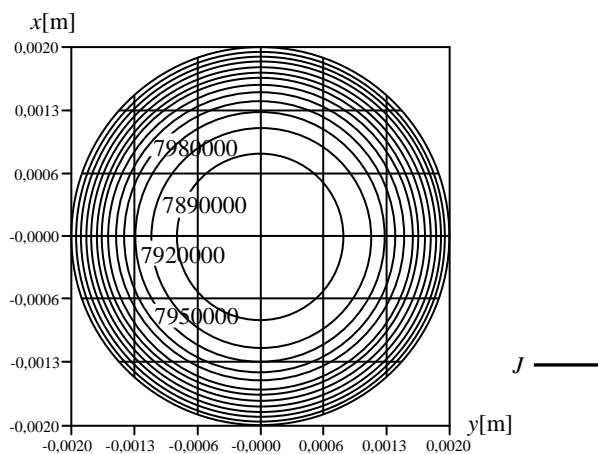


Rys. 26.8. Rozkład względnej wartości gęstości prądu w przewodzie o przekroju poprzecznym trójkątnym dla $f = 2$ kHz

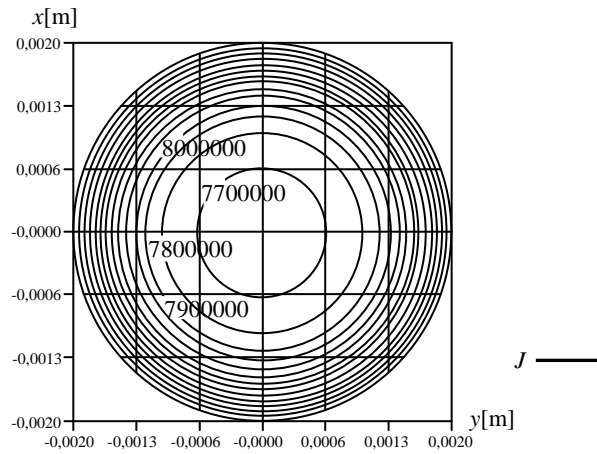
Na rys. 26.9, 26.10 oraz 26.11 przedstawiono rozkład rzeczywistych wartości gęstości prądu w przewodzie o przekroju poprzecznym okrągłym dla $f = 0,5$ kHz; 1 kHz; 2 kHz.



Rys. 26.9. Rozkład rzeczywistych wartości gęstości prądu w przewodzie o przekroju poprzecznym okrągłym dla $f = 0,5$ kHz

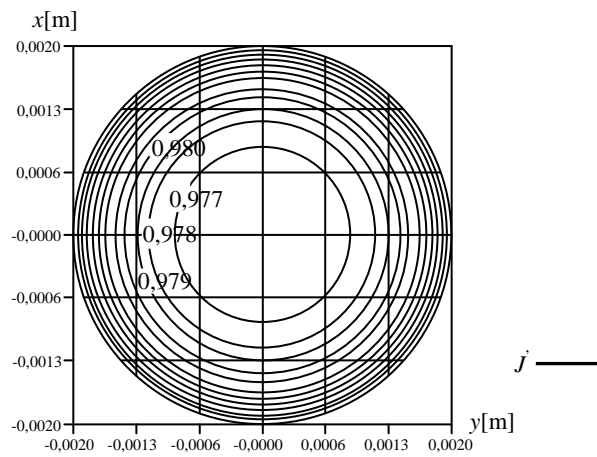


Rys. 26.10. Rozkład rzeczywistych wartości gęstości prądu w przewodzie o przekroju poprzecznym okrągłym dla $f = 1$ kHz

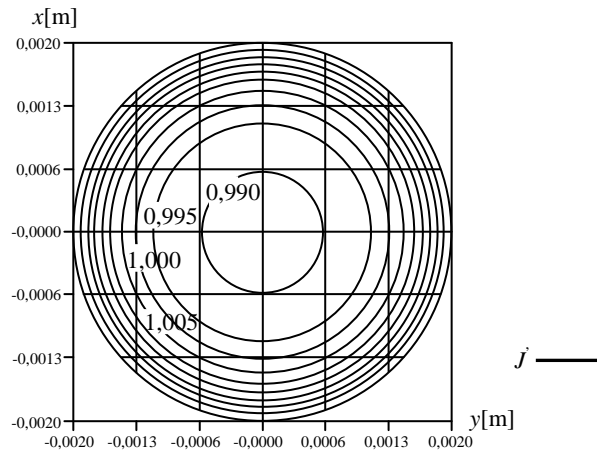


Rys. 26.11. Rozkład rzeczywistych wartości gęstości prądu w przewodzie o przekroju poprzecznym okrągłym dla $f = 2$ kHz

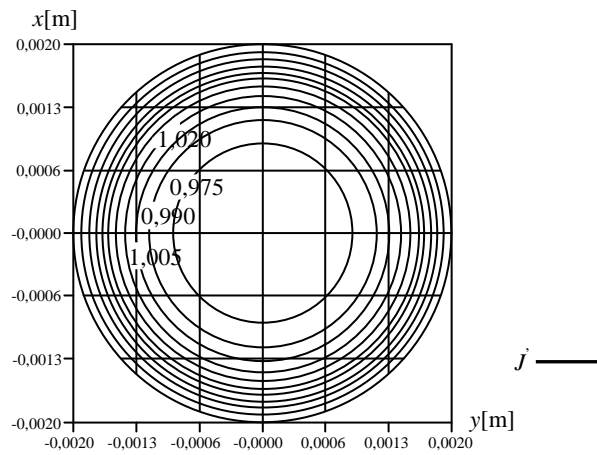
Na rys. 26.12, 26.13 oraz 26.14 przedstawiono rozkład względnych wartości gęstości prądu w przewodzie o przekroju poprzecznym okrągłym dla $f = 0,5$ kHz; 1 kHz; 2 kHz.



Rys. 26.12. Rozkład względnych wartości gęstości prądu w przewodzie o przekroju poprzecznym okrągłym dla $f = 0,5$ kHz

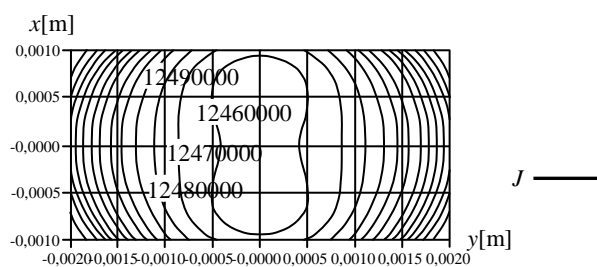


Rys. 26.13. Rozkład względnych wartości gęstości prądu w przewodzie o przekroju poprzecznym okrągłym dla $f = 1$ kHz

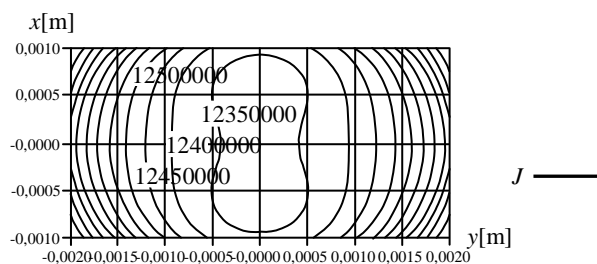


Rys. 26.14. Rozkład względnych wartości gęstości prądu w przewodzie o przekroju poprzecznym okrągłym dla $f = 2$ kHz

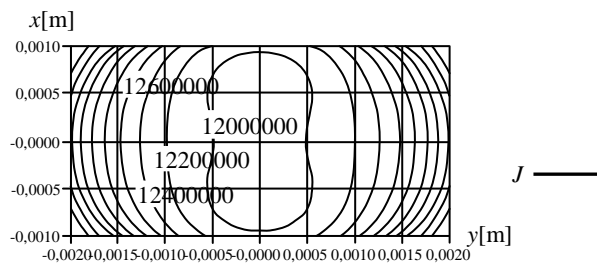
Na rys. 26.15, 26.16 oraz 26.17 przedstawiono rozkład rzeczywistych wartości gęstości prądu w przewodzie o przekroju poprzecznym prostokątnym dla $f = 0,5$ kHz; 1 kHz; 2 kHz.



Rys. 26.15. Rozkład rzeczywistych wartości gęstości prądu w przewodzie o przekroju poprzecznym prostokątnym dla $f = 0,5$ kHz

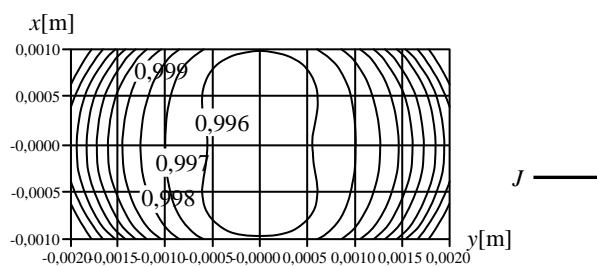


Rys. 26.16. Rozkład rzeczywistych wartości gęstości prądu w przewodzie o przekroju poprzecznym prostokątnym dla $f = 1$ kHz

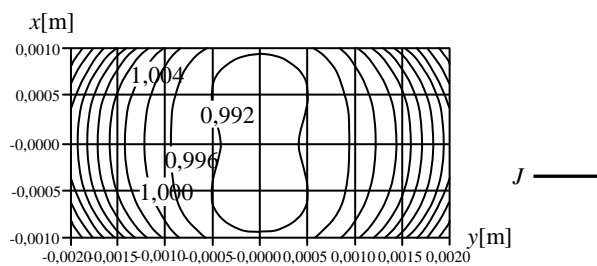


Rys. 26.17. Rozkład rzeczywistych wartości gęstości prądu w przewodzie o przekroju poprzecznym prostokątnym dla $f = 2$ kHz

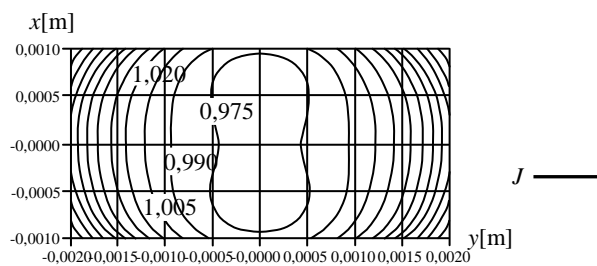
Na rys. 26.18, 26.19, 26.20 przedstawiono rozkład względnych wartości gęstości prądu w przewodzie o przekroju poprzecznym prostokątnym dla $f = 0,5$ kHz; 1 kHz; 2 kHz.



Rys. 26.18. Rozkład względnych wartości gęstości prądu w przewodzie o przekroju poprzecznym prostokątnym dla $f = 0,5$ kHz

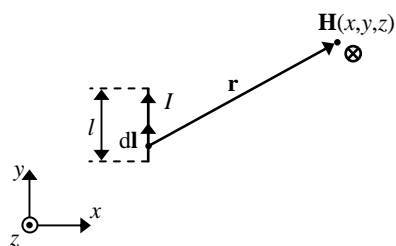


Rys. 26.19. Rozkład względnych wartości gęstości prądu w przewodzie o przekroju poprzecznym prostokątnym dla $f = 1$ kHz



Rys. 26.20. Rozkład względnych wartości gęstości prądu w przewodzie o przekroju poprzecznym prostokątnym dla $f = 2$ kHz

Innym przykładem pola elektromagnetycznego jest propagacja fal elektromagnetycznych wytwarzanych przez wibrator elementarny, rys. 26.21.



Rys. 26.21. Wibrator elementarny

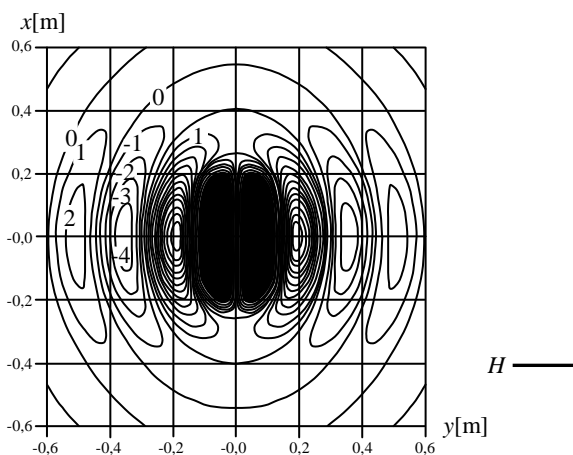
Zgodnie z prawem Biota – Savarta w przybliżeniu możemy określić pole elektromagnetyczne wytwarzane w otoczeniu wibratora

$$\mathbf{H}(r) = \frac{I}{4\pi} \int \frac{\mathbf{r} \times d\mathbf{l}}{r^3} \cdot \sqrt{2} e^{-kr} \quad (26.32)$$

gdzie

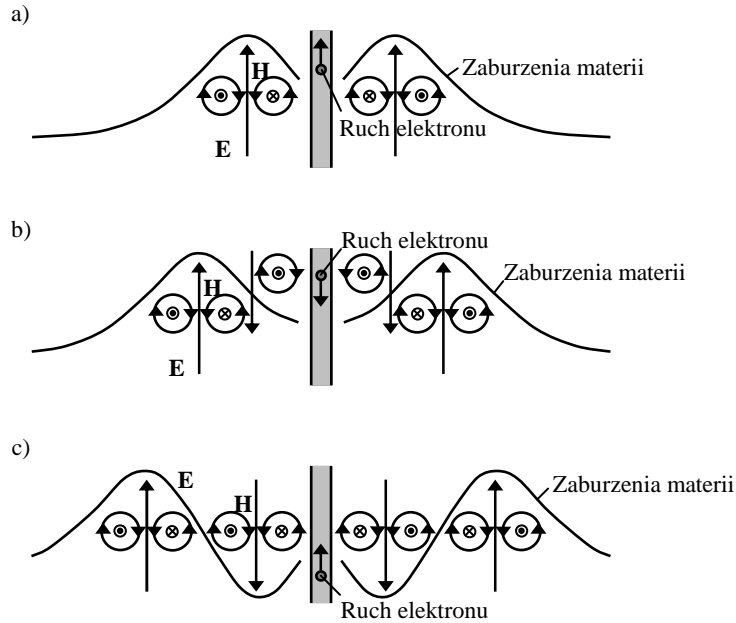
$$k = j \frac{2\pi}{\lambda} \quad (26.33)$$

Na rys. 26.22 przedstawiono rozkład natężenia pola magnetycznego H w otoczeniu wibratora elementarnego umieszczonego w próżni i wiodącego sinusoidalnie zmienny prąd o wartości skutecznej $I = 20$ A dla $l = 0,3$ m, $f = 1$ GHz i prędkości rozchodzenia się fal elektromagnetycznych $c = 3 \cdot 10^8$ m/s ($\lambda = 0,3$ m).



Rys. 26.22. Rozkład natężenia pola magnetycznego H w otoczeniu wibratora elementarnego umieszczonego w próżni i wiodącego sinusoidalnie zmienny prąd o wartości skutecznej $I = 20$ A dla $l = 0,3$ m, $f = 1$ GHz i prędkości rozchodzenia się fal elektromagnetycznych $c = 3 \cdot 10^8$ m/s ($\lambda = 0,3$ m)

Na rys. 26.23 pokazano schemat powstawania fal elektromagnetycznych, tzn. powstawania zaburzeń materii (gradientu potencjału pola elektrycznego) i ukierunkowanego wirowania elektronów atomów (pola magnetycznego).



Rys. 26.23. Schemat powstawania fal elektromagnetycznych, a) faza 1, b) faza 2, c) faza 3

Fale płaską w ośrodku jednorodnym o parametrach $\varepsilon > 0$, $\mu > 0$, $\gamma = 0$, czyli dielektryku, rozchodzącą się wzdłuż osi z opisują przy założeniu występowania tylko fal padających, dwa wektory prostopadłe do siebie, wektor natężenia pola elektrycznego \mathbf{E} oraz wektor natężenia pola magnetycznego \mathbf{H} , przy czym wartości chwilowe tych wektorów można opisać równaniami

$$E_t = M_1 \sqrt{2} \sin(\omega t - \beta z + \psi_1) \quad (26.34)$$

$$H_t = \frac{M_1 \sqrt{2}}{Z_f} \sin(\omega t - \beta z + \psi_1) \quad (26.35)$$

gdzie M_1 – stała całkowania z równań różniczkowych Maxwella, przy czym β – stała fazowa i Z_f – impedancja falowa ośrodka wyrażają się wzorami

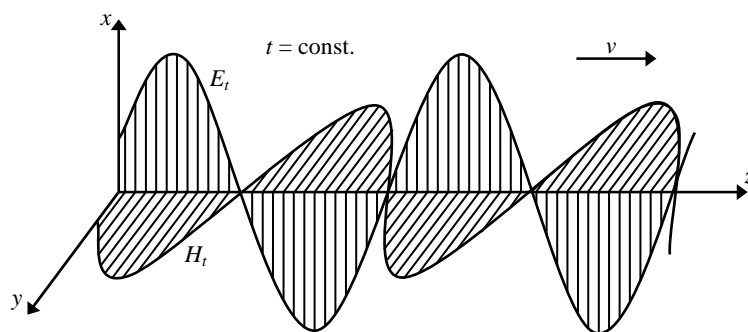
$$\Gamma = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{\varepsilon\mu} \Rightarrow \alpha = 0, \beta = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \quad (26.36)$$

$$Z_f = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (26.37)$$

gdzie Γ – stała rozprzestrzeniania się fal elektromagnetycznych, α – stała tłumienia. Prędkość fali płaskiej w ośrodku określa zależność

$$v = \frac{\omega}{\beta} \quad (26.38)$$

Na rys. 26.24 przedstawiono ilustracje rozkładu wartości chwilowych E_t i H_t wektora natężenia pola elektrycznego \mathbf{E} oraz wektora natężenia pola magnetycznego \mathbf{H} fali płaskiej w dielektryku dla $\varepsilon > 0, \mu > 0, \gamma = 0$.



Rys. 26.24. Ilustracja rozkładu wartości chwilowych E_t i H_t wektora natężenia pola elektrycznego \mathbf{E} oraz wektora natężenia pola magnetycznego \mathbf{H} fali płaskiej w dielektryku dla $\varepsilon > 0, \mu > 0, \gamma = 0$

LITERATURA

- Bolkowski S. *Elektrotechnika*, Warszawa: WSiP 1993
- Bolkowski S. *Elektrotechnika teoretyczna*, Warszawa: WNT 1982
- Cichowska Z., Pasko M., *Zadania z elektrotechniki teoretycznej*, Warszawa: 1985
- Ciechanowicz P., Dziedzic J. *Zbiór zadań z elektrotechniki teoretycznej*, Warszawa: PWN 1969
- Krakowski M. *Elektrotechnika teoretyczna*, Warszawa: PWN 1995
- Kukurba H., Śliwa A., *Zbiór zadań z elektrotechniki*, Warszawa: PWN 1983
- Kurdziel R. *Podstawy elektrotechniki*, Warszawa: WNT 1972
- Szulkin P., Pogorzelski S. *Podstawy teorii pola elektromagnetycznego*, Warszawa: WNT 1964
- Zbiór zadań z elektrotechniki teoretycznej*, praca zbiorowa, Warszawa: PWN 1985